BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2016

EPREUVE DU JEUDI 16 JUIN 2016

MATHÉMATIQUES

Séries STI2D et STL spécialité SPCL

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 / 7 à 7 / 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE n° 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note i le nombre complexe vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

1. Un argument du nombre complexe $2 + 2\mathrm{i}$ est égal à :

- **a.** $\frac{-\pi}{4}$
- **b.** $\frac{-9\pi}{4}$
- **c.** $2\sqrt{2}$
- **d.** $\frac{\pi}{4}$

2. Le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{15}}$ est égal à :

- **a.** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
- **b.** $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$
- **c.** $0,5 + 0,866 \times \mathrm{i}$
- **d.** $0,5 + 0,8660254038 \times \mathrm{i}$

3. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_B = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$. Le triangle OAB est :

- **a.** isocèle en O
- **b.** rectangle en O
- **c.** rectangle et isocèle en B
- **d.** isocèle en B

4. Pour tout nombre réel θ, le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ est égal à :

- **a.** $2\cos(\theta)$
- **b.** $\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$
- **c.** 1
- **d.** $2\mathrm{i}\sin(\theta)$

EXERCICE n° 2 (6 points)

Un centre de vacances possède une piscine de 600 m^3 soit 600 000 litres. L'eau du bassin contient du chlore qui joue le rôle de désinfectant. Toutefois le chlore se dégrade et 25% de celui-ci disparaît chaque jour, en particulier sous l'effet des ultra-violets et de l'évaporation. Le 31 mai à 9 h, le responsable analyse l'eau du bassin à l'aide d'un kit distribué par un magasin spécialisé.

Le taux de chlore disponible dans l'eau est alors de $1,25$ mg/L (milligrammes par litre).

Document

Réglementation des piscines publiques

Paramètres contrôlés	**Seuils de qualité réglementaire**	**Incidences sur la qualité de l'eau**
Présence de Chlore	Au minimum 2 mg/L	< 2 mg/L : sous chloration Risque de prolifération bactérienne dans l'eau
	Au maximum 4 mg/L	> 4 mg/L : surchloration Irritation de la peau

Source : Agence Régionale de Santé

À partir du 1^{er} juin pour compenser la perte en chlore, la personne responsable de l'entretien ajoute, chaque matin à 9 h, 570 g de chlore dans la piscine.

Pour le bien-être et la sécurité des usagers, le reponsable souhaite savoir si cet apport journalier en chlore permettra de maintenir une eau qui respecte la réglementation donnée par l'Agence Régionale de Santé pour les piscines publiques.

Partie A

1. Pour tout entier naturel n on note u_n la quantité de chlore disponible, exprimée en grammes, présente dans l'eau du bassin le $n^{ième}$ jour suivant le jour de l'analyse, immédiatement après l'ajout de chlore. Ainsi u_0 est la quantité de chlore le 31 mai à 9 h et u_1 est la quantité de chlore le 1^{er} juin à 9 h après l'ajout de chlore.

   a. Montrer que la quantité de chlore, en grammes, présente dans l'eau du bassin le 31 mai à 9h est $u_0 = 750$.
   Au regard des recommandations de l'agence régionale de santé, le responsable pouvait-il donner l'accès à la piscine le 31 mai ?

   b. Montrer que $u_1 = 1132,5$.

   c. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 570$

   d. La suite (u_n) est-elle géométrique ?

2. Soit l'algorithme ci-dessous :

```
Variables
  u : un nombre réel
  N : un nombre entier naturel
  k : un nombre entier naturel
Initialisation
  Saisir la valeur de N
Initialisation
  u prend la valeur 750
Traitement
  Pour k allant de 1 à N
    u prend la valeur 0,75u + 570
  Fin du Pour
Sortie
  Afficher u
```

a. Quel est le rôle de cet algorithme ?

b. Recopier et compléter le tableau suivant, par des valeurs exactes, en exécutant cet algorithme « pas à pas » pour $N = 3$:

Variables	Initialisation	Etape 1	Etape 2	Etape 3
u	750	1132,5		

Au regard des recommandations de l'agence régionale de santé, au bout de combien de jours la piscine peut-elle être ouverte ?

c. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la quantité de chlore le $15^{ième}$ jour juste après l'ajout de chlore.

Partie B

Au fil du temps, la quantité de chlore évolue. On note d_n l'écart de quantité de chlore d'un jour à l'autre en grammes. Pour tout entier naturel n, on a $d_n = u_{n+1} - u_n$.

1. a. Calculer d_0, d_1 et d_2. On donnera une valeur exacte.

   b. Justifier que d_0, d_1 et d_2 semblent être les termes d'une suite géométrique.

2. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -0,25u_n + 570$.

3. On admet que pour tout entier naturel n, on a $d_{n+1} = 0,75d_n$.

   a. Justifier que $d_n = 382,5 \times 0,75^n$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2280 - 1530 \times 0,75^n$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat trouvé.

EXERCICE n° 3 (4 points)

Quand l'oreille humaine est soumise à une intensité acoustique, exprimée en watts par mètre carré (W/m^2), le niveau sonore du bruit responsable de cette intensité acoustique est exprimé en décibels (dB).

Document

Echelle de bruit

Sources sonores	Intensité acoustique (W/m^2)	Niveau sonore (dB) arrondi éventuellement à l'unité	Sensation auditive
Décollage de la Fusée Ariane	10^6	180	Exige une protection spéciale
Turboréacteur	10^2	140	
Course de Formule 1	10	130	
Avion au décollage	1	120	Seuil de douleur
Concert et discothèque	10^{-1}	110	Très difficilement supportable
Baladeur à puissance maximum	10^{-2}	100	
Moto	10^{-5}	70	Pénible à entendre
Voiture au ralenti	10^{-7}	50	Bruit courant
Seuil d'audibilité	10^{-12}	0,08	Silence anormal

1. D'après le tableau, lorsque l'intensité acoustique est multipliée par 10, quelle semble être l'augmentation du niveau sonore ?

2. La relation liant l'intensité acoustique x où x appartient à l'intervalle $\left[10^{-12}\,;\,10^{6}\right]$ et le niveau sonore est donnée par :

$$f(x) = \frac{10}{\ln(10)} \times \ln(x) + 120.$$

On pourra prendre $\frac{10}{\ln(10)} \simeq 4{,}34$.

a. Vérifier la conjecture émise à la question 1.

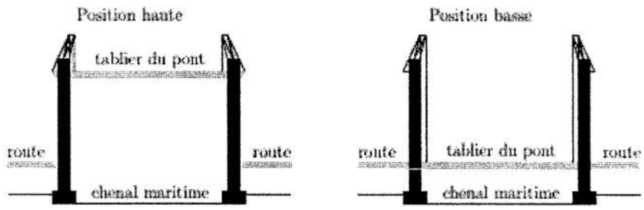
b. Quel serait le niveau sonore de deux motos ?

3. Pour éviter tout risque sur la santé, le port d'un casque de protection acoustique est donc conseillé au delà de 85 dB.
Déterminer l'intensité acoustique à partir de laquelle le port d'un tel casque est conseillé.

EXERCICE n° 4 (6 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Un pont levant enjambant un canal peu fréquenté est constitué d'un tablier qui, une fois relevé, permet le passage de bateaux de différentes tailles.



Hauteur du tablier en position haute : 7 mètres
Longueur du tablier : 30 mètres
Temps de montée du tablier : 2 minutes
Temps en position haute du tablier (hors incident) : 8 minutes
Temps de descente du tablier : 2 minutes

Partie A - Sur la route

Un automobiliste se présente devant le pont. Le tablier du pont est *en position haute*. On s'intéresse ici au temps d'attente D, exprimé en minutes, de l'automobiliste avant qu'il puisse franchir le canal, pont baissé (hors incident).

1. Combien de temps l'automobiliste attend-il au minimum ? au maximum ?
2. On admet que le temps d'attente, en minutes, de l'automobiliste pour franchir le pont est une variable aléatoire D qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2 ; 10]$.
   Déterminer l'espérance $E(D)$ de la variable aléatoire D et interpréter le résultat dans le contexte.
3. Calculer la probabilité que le temps d'attente de l'automobiliste ne dépasse pas 5 minutes.

Partie B - Sur l'eau

Dans cette partie les résultats demandés seront arrondis à 10^{-2} *près.*

Lorsqu'un bateau est passé, le tablier du pont revient en position basse. Le temps, exprimé en heures, avant que le bateau suivant se présente devant le pont est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$. Ce temps est appelé temps de latence.

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T et interpréter le résultat dans le contexte.

2. On considère la fonction f définie sur $[0\,,\,+\infty[$ par $f(x) = 0,05\mathrm{e}^{-0,05x}$.

a. Montrer que la fonction F définie sur $[0\,,\,+\infty[$ par $F(x) = -\mathrm{e}^{-0,05x}$ est une primitive de f.

b. On rappelle que pour tout nombre réel t de $[0\,,\,+\infty[$, $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.
Démontrer que $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-0,05t}$.

3. **a.** Calculer la probabilité que le temps de latence soit inférieur à une demi-journée, soit 12 heures.

b. Calculer la probabilité que le temps de latence soit supérieur à un jour.

c. Calculer $P(12 \leqslant T \leqslant 24)$.