Baccalauréat s

Corrigé

Session 2016

Épreuve : **Mathématiques**

1 Exercice 1

Partie A

Attention à une confusion possible entre S et $\bar{S}$!

1) On applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(\bar{S}) &= p(\bar{S}\cap A)+p(\bar{S}\cap B) \\ &= p_A(\bar{S})\times p(A)+p_B(\bar{S})\times p(B) \\ &= 0,20\times 0,40+0,05\times 0,60 \\ &= 0,08+0,03 \\ &= 0,11. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{p(S)=1-p(\bar{S})=0,89}.$$

2) On demande :

$$p_S(A) = \frac{p(A\cap S)}{p(S)}.$$

Reste à calculer $p(A\cap S)$: On peut utiliser les probabilités totales : $p(A\cap S)+p(A\cap\bar{S})=p(A)$:

$$\begin{aligned} p(A\cap S) &= p(A)-p(A\cap\bar{S}) \\ &= 0,40-0,08 \text{ (calculé au 1)} \\ &= 0,32. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} p_S(A) &= \frac{0,32}{p(S)} \\ &= \frac{0,32}{0,89} \\ &\approx 0,36. \end{aligned}$$

La probabilité demandée est donc $\boxed{36\%}$.

Partie B

On vérifie que $n\geqslant 30$ (ici $n=400$), $n\,f\geqslant 5$ (ici $n\,f=368$) et $n\,f(1-f)\geqslant 5$ (ici $n\,f\,(1-f)\approx 29$).

1) On calcule $\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{20}=0,05$.

On en déduit que $\boxed{p\in[0,87\,;\,0,99]}$ au taux de confiance de 95%.

2) Ici l'amplitude est $0{,}99-0,87=0,16$.

On souhaite que l'amplitude de $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}};f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soit à présent $0,02$.

Pour cela, on résoud : $\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0,01\Leftrightarrow\boxed{n=10000}$.

Partie C

1)a) $p(T\leqslant a)$ est égal à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ entre les abscisses $x=0$ et $x=a$:

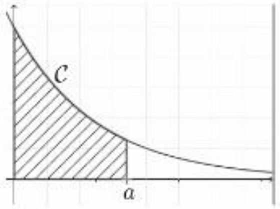

Figure 1. Illustration de $p(T \leqslant a)$.

1)b) Calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned} p(T \leqslant t) &= \int_0^t f(u) \mathrm{d}u \\ &= \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda u} \,\mathrm{d}u \\ &= [-e^{-\lambda u}]_0^t \\ &= 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

1)c) On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$ (car $\lambda > 0$).

Ainsi, $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$.

2) On suppose donc que $1 - e^{-\lambda \times 7} = 0,5$. On résoud cela en λ :

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\lambda \times 7} = 0,5 &\Leftrightarrow e^{-\lambda \times 7} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow -7\lambda = \ln(0,5) \\ &\Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\ln(2)}{7} \approx 0,099}. \end{aligned}$$

3)a) On demande $p(T \geqslant 5)$.

On remarque que $p(T \geqslant t) = 1 - p(T \leqslant t) = e^{-\lambda t}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} p(T \geqslant 5) &= e^{-0,099 \times 5} \\ &\approx 0,61. \end{aligned}$$

La probabilité demandée est donc $\boxed{61\%}$.

3)b) On demande $p_{T \geqslant 2}(T \geqslant 7)$. La loi exponentielle étant sans vieillissement, ceci est égal à $p(T \geqslant 5)$ donc au résultat précédent : $\boxed{61\%}$.

L'énoncé ne stipule pas s'il faut redémontrer cela.

Au cas où, voici la démonstration :

$$\begin{aligned} p_{T \geqslant 2}(T \geqslant 7) &= \frac{p(T \geqslant 2 \cap T \geqslant 7)}{p(T \geqslant 2)} \\ &= \frac{p(T \geqslant 7)}{p(T \geqslant 2)} \\ &= \frac{e^{-\lambda \times 7}}{e^{-\lambda \times 2}} \\ &= e^{-\lambda \times 5}. \end{aligned}$$

3)c) $E(T) = \frac{1}{\lambda} \approx \boxed{10,1}$.

On peut espérer qu'un composant dure 10,1 années en moyenne.

2 Exercice 2

• Affirmation 1 : **fausse**

$\overrightarrow{AB}(2,-2,-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,-2,-2)$.

Clairement ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

• Affirmation 2 : **vraie**

Puisqu'on a déjà $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, calculons leur produit scalaire avec $\vec{n}$:

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} &= 0+1\times(-2)+(-1)\times(-2)=0.\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} &= 0+1\times(-2)+(-1)\times(-2)=0.\end{aligned}$$

On a bien $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$.

• Affirmation 3 : **vraie**

Soit $I = \text{mil}[BC]$: on a

$$I(1,0,1).$$

Vérifions que $I \in (EF)$:

$\overrightarrow{EF}(-1,-1,1)$ et $\overrightarrow{EI}(2,2,-2)$. On a bien $\overrightarrow{EI} = -2\overrightarrow{EF}$ donc oui, I, E, F alignés.

Vérifions que $I \in (ABC)$:

L'équation de (ABC) est (on utilise le vecteur $\vec{n}$) :

$$y - z = y_A - z_A \iff y - z = -1.$$

Oui, les coordonnées de I vérifient cette équation.

• Affirmation 4 : **fausse**

On donne des équations paramétriques de ces deux droites :

$$(AB)\ :\ \begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 2-2t \\ z &= 3-2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

$$(CD)\ :\ \begin{cases} x &= -1+3u \\ y &= u \\ z &= 1-2u \end{cases}, u\in\mathbb{R}.$$

On résoud :

$$\begin{cases} 1+2t \\ 2-2t \\ 3-2t \end{cases} = \begin{cases} -1+3u \\ u \\ 1-2u \end{cases} \iff \begin{cases} 1+2t=-1+3u \\ 2-2t=u \\ 3-2t=1-2u \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2t=3u-2 \\ 2t=-u+2 \\ 2t=2u+2 \end{cases}.$$

On trouve la condition nécessaire $3u-2=-u+2=2u+2$, qui n'a pas de solution en u.

3 Exercice 3

Partie A

1) On doit résoudre :

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Leftrightarrow \ln(x^2+1)=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+1=1 \\ &\Leftrightarrow \boxed{x=0}. \end{aligned}$$

2) Justifions donc :

- Lorsque $x \to -\infty$, x^2+1 tend vers $+\infty$ donc son ln tend vers $+\infty$, donc $-\ln(x^2+1)$ tend vers $-\infty$. Par somme, on a donc bien $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

- $f'(x)=1-\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ toujours positif ; et nul pour $(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.

3) Sur $[0;1]$, f est croissante donc $f([0;1])=[f(0);f(1)]=[0;f(1)]$.

De plus, $f(0)=0$ et $f(1)=1-\ln(2)$.

Vu que $1<2<e$, on a $0<\ln(2)<1$ donc aussi $0<1-\ln(2)<1$.

Ainsi, $f([0;1]) \subset [0;1]$ ce qu'il fallait montrer.

4) a) f étant croissante de limite $+\infty$ en $+\infty$, elle peut atteindre n'importe quelle ordonnée A fixée.

Cet algorithme prend une valeur de A et renvoie la plus petite valeur entière de N telle que $f(N) \geqslant A$.

4) b) La question revient à résoudre :

$$f(x)=100 \Leftrightarrow x-\ln(1+x^2)=100.$$

On doit utiliser les tableurs (TABLE) de nos calculatrices.

Voici un extrait de la mienne :

x	$f(x)$
106.000000000000	96.6730328160922
107.000000000000	97.6542549910177
108.000000000000	98.6356518155446
109.000000000000	99.6172200710844
110.000000000000	100.598956627202
111.000000000000	101.580858438426

On constate que ici l'algorithme renverra 110.

Remarque : pour $N=109$, on a $N-\ln(N^2+1)<100$ donc la boucle se fait et N prend la valeur $N+1$ donc $N=110$. Ensuite, le test est négatif donc la boucle ne se fait pas. C'est pourquoi l'algorithme renvoie la valeur 110 et non pas 109.

Partie B

1) Déjà $u_0 \in [0;1]$ puisque $u_0 = 1$.

Ensuite, l'implication $x \in [0;1] \Rightarrow f(x) \in [0;1]$ démontrée plus haut donne l'hérédité, car elle montre que si $u_n \in [0;1]$ alors $u_{n+1} = f(u_n)$ est aussi dans $[0;1]$.

2) f est croissante donc (u_n) est monotone.

Vu que $u_1 \leqslant u_0$ (puisque $u_0 = 1$ et $u_1 \in [0;1]$) on a (u_n) décroissante.

3) (u_n) est décroissante minorée donc convergente.

4) $\ell = 0$ (d'après la question 1 de la partie A).

Pour info voici les escaliers de la suite (u_n) :

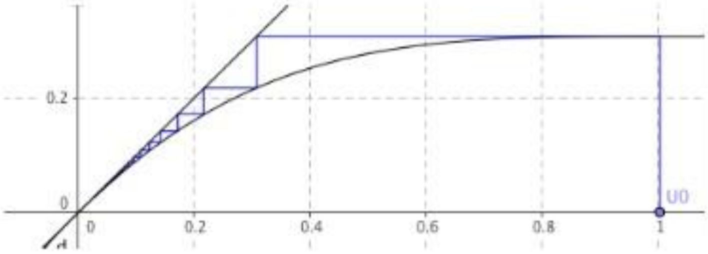

Figure 2.

4 Exercice 4

1) $\tan(\alpha) = \dfrac{EA}{ET} = \dfrac{25}{x}$. De même, $\tan(\beta) = \dfrac{30,6}{x}$.

2) Posons $f(x) = \tan x$.

Déjà la définition donnée est valable dans $]0;\pi/2[$ car dans cet intervalle, on a $\cos(x) \neq 0$.

Ensuite, par dérivation d'un quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} > 0. \end{aligned}$$

3) Clairement $\gamma = \beta - \alpha$ donc :

$$\begin{aligned} \tan(\gamma) &= \tan(\beta - \alpha) \\ &= \frac{\tan(\beta) - \tan(a)}{1 + \tan(\beta)\tan(\alpha)} \\ &= \frac{\frac{5,6}{x}}{1 + \frac{30,6 \times 25}{x^2}} \text{ on va multiplier par } x^2 \text{ en haut et en bas :} \\ &= \frac{5,6\,x}{x^2 + 30,6 \times 25}. \end{aligned}$$

Vu que $30,6 \times 25 = 765$ on a bien le résultat demandé.

4) On cherche à maximaliser $\dfrac{5,6\,x}{x^2 + 765}$. En divisant par x en haut et en bas, on voit que cette quantité peut s'écrire $\dfrac{5,6}{x + \frac{765}{x}}$. D'après les propriétés d'un inverse, maximaliser $\frac{5,6}{x + \frac{765}{x}}$ revient donc à minimaliser $x + \frac{765}{x}$.

Pour ce faire, on dérive la fonction $u(x) = x + \frac{765}{x}$, on trouve :

$$u'(x) = 1 - \frac{765}{x^2}.$$

On résoud :

$$\begin{aligned} u'(x) = 0 \; &\Leftrightarrow \; x^2 = 765 \\ &\Leftrightarrow \; x \approx 27,66. \end{aligned}$$

Ainsi, la valeur de x optimale au mètre près est : $x_0 = 28$.

Calculons l'angle correspondant :

$$\begin{aligned} u(x_0) &= 28 + \frac{765}{28} \approx 55,32 \\ \frac{5,6}{u(x_0)} &= \frac{5,6}{55,32} \approx 0,101, \end{aligned}$$

dont on calcule l'arctangente ; on trouve $\gamma \approx 0,10$ rad (environ 6°).