Corrigé du Bac maths Sti2d & Stl juin 2016

Exercice n°1 :

1. $| 2+2i |=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ donc $2+2i=2\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin(\frac{\pi}{4}))$.
Un argument du nombre complexe $2+2i$ est donc $\frac{\pi}{4}$.
La réponse exacte est la d..

2. $e^{i\frac{\pi}{5}}\times e^{i\frac{2\pi}{15}}=e^{i\left(\frac{3\pi}{15}+\frac{2\pi}{15}\right)}=e^{i\frac{5\pi}{15}}=e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$
La réponse exacte est la a..

3. $| z_A |=2$ et $| z_B |=\frac{5}{2}$ donc le triangle n'est pas isocèle en O.
$z_A-z_B=2e^{i\frac{\pi}{3}}-\frac{5}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)-\frac{5}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
$z_A-z_B=1+i\sqrt{3}-\frac{5}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=1+i\sqrt{3}+\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{5}{4}i=1+\frac{5\sqrt{3}}{4}+i(\sqrt{3}-\frac{5}{4})$, donc :
$AB^2=| z_A-z_B |^2=\left(1+\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{5}{4}\right)^2=1+\frac{10\sqrt{3}}{4}+\frac{75}{16}+3-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{25}{16}=4+\frac{100}{16}+\frac{10\sqrt{3}}{4}-\frac{10\sqrt{3}}{4}$
$AB^2=| z_A-z_B |^2=4+\frac{25}{4}$.
Or, $OA^2=| z_A |^2=4$ et $OB^2=| z_B |^2=\frac{25}{4}$, donc $OA^2+OB^2=4+\frac{25}{4}=AB^2$ et, d'après le théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en O.
La réponse exacte est la b..

4. Pour tout nombre réel θ,
$e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{i\theta}+e^{-i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)+(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))=\cos(\theta)+i\sin(\theta)+(\cos(\theta)-i\sin(\theta))=2\cos(\theta)$.
La réponse exacte est la a..

Exercice n°2 :

Partie A

1. a. $u_0=600\,000\times1{,}25$ mg $=750\,000$ mg $=750$ g.
Le 31 mai à 9 h, le taux de chlore disponible dans l'eau est de 1,25 mg/L donc le responsable ne pouvait donner l'accès à la piscine le 31 mai.

1. b. $u_1=0{,}75\times u_0+570=0{,}75\times750+570=562{,}5+570=1\,132{,}5$ g.

1. c. Le $(n+1)^{\text{ième}}$ jour suivant le jour de l'analyse, la quantité de chlore disponible est de 0,75 fois celle du $n^{\text{ième}}$ jour suivant le jour de l'analyse à laquelle on rajoute 570 g.
Pour tout entier naturel n, on a donc $u_{n+1}=0{,}75\times u_n+570$.

1. d. Non, ce n'est pas une relation de récurrence d'une suite géométrique.
La suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. a. L'algorithme affiche la quantité de chlore disponible (en grammes) le $N^{\text{ième}}$ jour suivant le jour de l'analyse.

2. b.

Variables	Initialisation	Etape 1	Etape 2	Etape 3
u	$u_0 = 750$	$u_1 = 1\,132{,}5$	$u_2 = 1\,419{,}375$	$u_3 = 1\,634{,}53125$

Pour la piscine de 600 000 litres, 2 mg/L de chlore correspondent à $2 \times 600\,000 = 1\,200\,000$ mg = 1 200 g de chlore. C'est donc au bout de 2 jours que la piscine peut être ouverte.

2. c. Après des calculs successifs, $u_{15} \approx 2\,259{,}554$ g à 10^{-3} près.

Partie B

1. a. $d_0 = u_1 - u_0 = 1\,132{,}5 - 750 = 382{,}5$ g.
$d_1 = u_2 - u_1 = 1\,419{,}375 - 1\,132{,}5 = 286{,}875$ g.
$d_2 = u_3 - u_2 = 1\,634{,}53125 - 1\,419{,}375 = 215{,}15625$ g.

1. b. $\frac{d_1}{d_0} = \frac{286{,}875}{382{,}5} = 0{,}75$ et $\frac{d_2}{d_1} = \frac{215{,}15625}{286{,}875} = 0{,}75$, donc d_0, d_1 et d_2 semblent être les termes d'une suite géométrique.

2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75 \times u_n + 570$ donc :
$u_{n+1} - u_n = 0{,}75 \times u_n + 570 - u_n = -0{,}25u_n + 570.$

3. a. (d_n) est une suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme $d_0 = 382{,}5$, donc :
$d_n = 382{,}5 \times 0{,}75^n$ pour tout entier naturel n.

3. b. D'après la question **2.**, $d_n = -0{,}25u_n + 570$ donc $0{,}25u_n = 570 - d_n$ et $u_n = 2\,280 - 4d_n$.
On a donc $u_n = 2\,280 - 4 \times (382{,}5 \times 0{,}75^n) = 2\,280 - 1\,530 \times 0{,}75^n$ pour tout entier naturel n.

3. c. $0 < 0{,}75 < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} 0{,}75^n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2\,280$, d'après les opérations sur les limites.
Lorsque n devient très grand, la quantité de clore disponible tend vers 2 280 g.

Exercice n°3 :

1. D'après le tableau, lorsque l'intensité acoustique est multipliée par 10, l'augmentation du niveau sonore semble être de 10 dB.

2. a. Soit $x \in [10^{-12} ; 10^6]$ tel que $10x$ appartient aussi à cet intervalle.
$f(10x) = \frac{10}{\ln 10} \times \ln(10x) + 120$
$f(10x) = \frac{10}{\ln 10} \times (\ln 10 + \ln x) + 120$
$f(10x) = \frac{10}{\ln 10} \times \ln 10 + \frac{10}{\ln 10} \times \ln x + 120$
$f(10x) = 10 + f(x)$.
La conjecture émise à la question **1.** est donc vraie.

2. b. $f(2 \times 10^{-5}) = \frac{10}{\ln 10} \times \ln(2 \times 10^{-5}) + 120 \approx 73$ dB.
Le niveau sonore de deux motos serait de 73 dB.

3. Soit x l'intensité acoustique (en W/m^2) à partir de laquelle un casque est conseillé.
On doit donc résoudre $f(x) \geq 85$:
$f(x) \geq 85 \quad \Leftrightarrow f(x) = \frac{10}{\ln 10} \times \ln(x) + 120 \geq 85$
$f(x) \geq 85 \quad \Leftrightarrow \frac{10}{\ln 10} \times \ln(x) \geq 85 - 120 = -35$
$f(x) \geq 85 \quad \Leftrightarrow \ln(x) \geq -35 \times \frac{\ln 10}{10} \approx -8{,}06$
Or, $e^{-8{,}06} \approx 0{,}0003 \approx 3 \times 10^{-4}$, donc l'intensité acoustique recherchée est 3×10^{-4} W/m^2.

Exercice n°4 :

Partie A

1. L'automobiliste attend au minimum 2 minutes qui est le temps de descente du tablier et il attend au maximum $8 + 2 = 10$ minutes (temps en position haute du tablier + temps de descente du tablier).

2. $E(D) = \frac{2+10}{2} = 6$ donc le temps moyen d'attente de l'automobiliste est de 6 minutes.

3. $P(2 \leq D \leq 5) = \frac{5-2}{10-2} = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

Partie B

1. $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}05} = 20$. Le temps moyen avant que le prochain bateau se présente est donc de 20 h.

2. a. Pour $x \in [0\,;+\infty[$, $F'(x) = -(-0{,}05)e^{-0{,}05x} = 0{,}05e^{-0{,}05x} = f(x)$.
F est donc une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. b. Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$,
$P(T \leq t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_0^t = F(t) - F(0) = -e^{-0{,}05t} - (-1) = 1 - e^{-0{,}05t}$.

3. a. $P(T \leq 12) = 1 - e^{-0{,}05\times 12} = 1 - e^{-0{,}6} \approx 0{,}45$ à 10^{-2} près.
La probabilité que le temps de latence soit inférieur à une demi-journée est environ 0,45.

3. b. $P(T \geq 24) = 1 - P(T \leq 24) = 1 - (1 - e^{-0{,}05\times 24}) = e^{-1{,}2} \approx 0{,}30$ à 10^{-2} près.
La probabilité que le temps de latence soit supérieur à une journée est environ 0,30.

3. c. $P(T \leq 12) + P(12 \leq T \leq 24) + P(T \geq 24) = 1$ donc :
$P(12 \leq T \leq 24) = 1 - (P(T \leq 12) + P(T \geq 24)) \approx 1 - (0{,}45 + 0{,}30) \approx 1 - 0{,}75 \approx 0{,}25$.
La probabilité que le temps de latence soit compris entre une demi-journée et une journée est environ 0,25.