

Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI 2D/STL-SPCL
Métropole 19 juin 2014

EXERCICE 1

4 points

1. X suit la loi normale telle que $\mu = 200$ et $\sigma = 2,86$.
 - a. $p(195 \leq X \leq 205) \approx 0,9196$.
 - b. $p(X \geq 195) = p(195 \leq X \leq +\infty) \approx 0,9598$.
2. $IF_{95\%} = \left[0,04 \pm 1,96 \times \sqrt{\frac{0,04 \times (1-0,04)}{150}} \right] = [0,04 \pm 0,0314] = [0,0086 ; 0,0714]$.
 $f = \frac{10}{150} = \frac{1}{15} \approx 0,0667$.
Avec $f \in IF_{95\%}$, le réglage de la machine n'est pas remis en cause.

EXERCICE 2

4 points

$$z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } z' = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

1. $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$.
2. $z' = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3} = \bar{z}$.
3. $z \cdot z' = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2 \times 2 \times e^{i\frac{2\pi}{3} - i\frac{2\pi}{3}} = 4 \times e^0 = 4 \times 1 = 4$.
4. $z \cdot z'' = i \iff z'' = \frac{i}{z} \iff z = \frac{i}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{i(-1 - i\sqrt{3})}{(-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})} = \frac{-i - i^2\sqrt{3}}{(-1)^2 - (i\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3} - i}{1 + 3} = \frac{\sqrt{3} - i}{4}$.
Donc
 $|z''| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.
Ce qui nous donne :
 $\cos \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = -\frac{1}{2}$.
donc $\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

EXERCICE 3

6 points

Partie A :

$\forall t \in [0 ; +\infty[$ on a $f(t) = 35e^{-1,6t} - 30$.

1. $f(0,5) = 35e^{-0,8} - 30 \approx -14$ °C.
2. $f'(t) = -1,6 \times 35e^{-1,6t} + 0 = -56e^{-1,6t}$ or $\forall t \in [0 ; +\infty[$, $e^{-1,6t} > 0$ et $-56 < 0$ donc $f'(t) < 0$ sur $[0 ; +\infty[$. La fonction f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.
3. $f(1,5) = 35e^{-2,4} - 30 \approx -27$ °C. La température des ailerons sera conforme au cahier des charges.

$$\begin{aligned}
 4. \quad f(t) = -24 &\iff 35e^{-1,6t} - 30 = -24 \iff 35e^{-1,6t} = 6 \iff e^{-1,6t} = \frac{6}{35} \iff \\
 \ln(e^{-1,6t}) &= \ln\left(\frac{6}{35}\right) \iff -1,6t = \ln\left(\frac{6}{35}\right) \iff t = -\frac{1}{1,6} \ln\left(\frac{6}{35}\right) \iff \\
 t &= -0,625 \ln\left(\frac{6}{35}\right) \approx 1,10.
 \end{aligned}$$

Les ailerons atteignent la température de -24°C au bout de 1 h et 6 min.

Partie B :

$\forall t \in [0; +\infty[$ on a $y' + 1,5y = -52,5$.

1. $y' + 1,5y = -52,5 \iff y' = -1,5y - 52,5$ ce qui nous donne $y = Ke^{-1,5t} - \frac{52,5}{1,5} \iff y = Ke^{-1,5t} - 35$.
2. a. À l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5°C , sont placés dans le tunnel donc $g(0) = 5$.
b. $g(0) = 5 \iff Ke^0 - 35 = 5 \iff K = 35 + 5 \iff K = 40$ donc $g(t) = 40e^{-1,5t} - 35$.
3. $g(t) = -24 \iff 40e^{-1,5t} - 35 = -24 \iff 40e^{-1,5t} = 11 \iff e^{-1,5t} = \frac{11}{40} \iff \ln(e^{-1,5t}) = \ln\left(\frac{11}{40}\right) \iff -1,5t = \ln\left(\frac{11}{40}\right) \iff t = -\frac{1}{1,5} \ln\left(\frac{11}{40}\right) \iff t = -\frac{2}{3} \ln\left(\frac{11}{40}\right) \approx 0,9944$.

Les ailerons atteignent la température de -24°C au bout de 1 h pile.

Le tunnel permet une congélation un peu plus rapide.

EXERCICE 4

6 points

1. Une diminution de 10 % toutes les 5 minutes : $1 - 0,1 = 0,9$.
a. $v_1 = 420 \times 0,9 = 378 \text{ km/h}$. Ce résultat fait bien partie de la règle admise. La tornade appartient à la catégorie F4.
b. Pour 15 minutes, on a $15 = 5 \times 3$ donc $n = 3$.
 $v_2 = 378 \times 0,9 = 340,2 \approx 340 \text{ km/h}$ et $v_3 = 340,2 \times 0,9 = 306,18 \approx 310 \text{ km/h}$.
Au bout de 15 minutes, la tornade est une tornade de catégorie F3.
Cette tornade occasionne des dégâts classés comme « dégâts considérables ».
2. a. La diminution de 10 % correspond à la raison de la suite $q = 0,9$.
b. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = 420$:
c. « Tant que $v > 120$ »
« Affecter à n , la valeur $n + 1$ »
« v prend la valeur $v \times 0,9$ »
d. Comme la tempête diminue de 10 % toutes les 5 minutes (et non pas toutes les minutes). On fait $5 \times n$.
3. La suite géométriques est définie par : $v_n = 420 \times 0,9^n$.
4. $v_n < 120 \iff 420 \times 0,9^n < 120 \iff 0,9^n < \frac{120}{420} \iff 0,9^n < \frac{2}{7} \iff \ln(0,9^n) < \ln\left(\frac{2}{7}\right) \iff n \times \ln(0,9) < \ln\left(\frac{2}{7}\right) \iff n > \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\ln(0,9)} \iff n > 11,89$.
On a donc $n = 12$, la durée de vie de la tornade est de $12 \times 5 = 60$ c'est-à-dire 1 heure.