Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat STI 2D/STL spécialité SPCL ∾ Métropole–La Réunion 18 juin 2015

EXERCICE 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

1. On considère le nombre complexe $z = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. La forme algébrique du nombre complexe z est :

a. $\cancel{-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}}$ **b.** $\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}}$ **c.** $\cancel{\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}}$ **d.** $\cancel{-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}}$.

2. $z_1 = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{3}-\mathrm{i}$. La forme exponentielle du nombre complexe $z_1 \times z_2$ est :

a. $\boxed{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$ **b.** $\cancel{-4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$ **c.** $\cancel{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$ **d.** $\cancel{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

3. Les solutions de l'équation différentielle $y" + \frac{1}{3}y = 0$ sont de la forme :

a. $\cancel{t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{3}}t^2}$

b. $\boxed{t \longmapsto A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right) + B\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)}$

c. $\cancel{t \longmapsto A\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t}}$

d. $\cancel{t \longmapsto -\frac{1}{3}}$.

4. La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2+\frac{1}{x+1}$. La limite de cette fonction f en $+\infty$ est égale à :

a. $\cancel{-\infty}$ **b.** $\cancel{+\infty}$ **c.** $\cancel{0}$ **d.** $\boxed{2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près.*

Une fibre optique est un fil très fin, en verre ou en plastique, qui a la propriété d'être un conducteur de la lumière et sert dans la transmission d'un signal véhiculant des données.
La puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), s'atténue au cours de la propagation.
On note P_E et P_S les puissances respectives du signal à l'entrée et à la sortie d'une fibre.
Pour une fibre de longueur L exprimée en kilomètres (km), la relation liant P_E, P_S et L est donnée par : $P_S = P_E \times \mathrm{e}^{-aL}$ où a est le coefficient d'atténuation linéaire dépendant de la fibre.
Une entreprise utilise deux types de fibre optique de coefficients d'atténuation différents.
Dans tout l'exercice :

- la puissance du signal à l'entrée de la fibre est 7 mW ;
- à la sortie, un signal est détectable si sa puissance est d'au moins 0,08 mW ;
- pour rester détectable, un signal doit être amplifié dès que sa puissance devient strictement inférieure à 0,08 mW.

Partie A

Le premier type de fibre de longueur 100 km utilisé par l'entreprise a un coefficient d'atténuation linéaire $a = 0,046$.
Pour ce type de fibre, il sera nécessaire de placer au moins un amplificateur sur la ligne pour que le signal soit détectable en sortie. En effet, calculons $P_S(100)$ pour $a = 0,046$. $7 \times \mathrm{e}^{-0,046\times 100} \approx 0,0703$.

Le signal à la sortie n'est pas détectable car inférieur à 0,08 mW.

Partie B

La puissance du signal le long du second type de fibre est modélisée par une fonction g de la variable x, où x étant la distance en kilomètres parcourue par le signal depuis l'entrée de la fibre. On admet que cette fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $y' + 0,035y = 0$.

1. Résolvons l'équation différentielle (E) : $y' + 0,035y = 0$.
   Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(x) = C\mathrm{e}^{-ax}$ où C est une constante quelconque.
   $a = 0{,}035$. Les solutions de (E) sont les fonctions définies par $y(t) = C\mathrm{e}^{-0{,}035t}$.
2. **a.** Sachant que $g(0) = 7$, vérifions que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 7\mathrm{e}^{-0{,}035x}$.
   Pour ce faire, déterminons la valeur de C. $y(0) = C\mathrm{e}^{-0{,}035\times 0} = C = 7$.
   Par conséquent la fonction g solution de (E) vérifiant la condition initiale est définie par : $g(x) = 7\mathrm{e}^{-0{,}035x}$ pour tout x de $[0\,,\,+\infty[$.
   b. Le coefficient d'atténuation de cette fibre est 0,035.
3. **a.** Étudions le sens de variation de la fonction g.
   La fonction dérivée est définie par $g'(x) = 7\left(-0{,}035\mathrm{e}^{-0{,}035x}\right) = -0{,}245\mathrm{e}^{-0{,}035x}$.
   Pour tout $x \in [0\,,\,+\infty[$, $\quad g'(x) < 0$ comme produit d'un réel strictement négatif et d'un réel strictement positif.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
   Pour tout $x \in [0\,,\,+\infty[$, $\quad g'(x) < 0$ par conséquent la fonction g est strictement décroissante sur $[0\,,\,+\infty[$.
   b. Déterminons la limite de la fonction g en $+\infty$.
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.
4. **a.** Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100 km de propagation ? Calculons $g(100)$.
   $g(100) = 7\mathrm{e}^{-0{,}035\times 100} \approx 0{,}2114$. Il sera donc possible de détecter le signal.
   b. Déterminons la longueur maximale de la fibre permettant une détection du signal à la sortie sans amplification. Résolvons $g(x) < 0{,}08$.
   $7\mathrm{e}^{-0{,}035x} < 0{,}08\,;\quad \mathrm{e}^{-0{,}035x} < 0{,}01142857\,;\quad -0{,}035x < \ln 0{,}01142857\,;\quad x > -\dfrac{\ln 0{,}01142857}{0{,}035}\,;$
   $x > 127{,}76$ à 10^{-2} près.
   La longueur maximale de la fibre permettant une détection est d'environ 127,76 km.

EXERCICE 3 — 6 points

Le parc de véhicules particuliers (VP) et de véhicules utilitaires légers (VUL) circulant en France est essentiellement constitué de véhicules thermiques (principalement essence, gasoil et GPL).
Pour lutter contre la pollution, il intègre de plus en plus de véhicules à « faible émission de CO_2 » c'est-à-dire des véhicules hybrides (véhicules thermiques assistés d'un moteur électrique) et des véhicules électriques.

Document 1

Au regard du parc et des ventes de véhicules en 2010, l'ADEME (Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie) a mobilisé ses services techniques et économiques en 2012, afin d'élaborer des visions énergétiques. Afin de répondre aux enjeux environnementaux, l'ADEME prévoit d'atteindre pour le parc 2030 un taux moyen d'émission de CO_2 par véhicule de 100 g/km.

Ventes et prévisions

Véhicules (VP-VUL)	**Ventes 2010**	**Parc 2010**	**Prévisions ventes 2030**	**Prévisions parc 2030**
Véhicules thermiques	100 %	100 %	64 %	89 %
Véhicules hybrides	0 %	0 %	24 %	7 %
Véhicules électriques	0 %	0 %	12 %	4 %
Total des voitures VP et VUL	2,2 millions	35 millions	2 millions	35 millions
Émission moyenne de CO_2 par véhicule	127 g/km	165 g/km	49 g/km	100 g/km

Document 2

Ventes nationales de véhicules entre 2011 et 2013			
Véhicules (VP- VUL)	**Ventes 2011**	**Ventes 2012**	**Ventes 2013**
Véhicules hybrides	13 600	27 730	41 340
Véhicules électriques	4 313	9 314	13 954
Total des ventes y compris véhicules thermiques	2 204 065	1 898 872	1 790 000

Partie A

1. Selon les prévisions de l'ADEME, le nombre de véhicules hybrides vendus serait en 2030 de 480 000 véhicules. $\dfrac{24}{100} \times 2\,000\,000 = 480\,000$.
2. Selon les prévisions de l'ADEME, le pourcentage de véhicules à faible émission de CO_2 dans le parc automobile serait en 2030 de 11 %.

   En effet, la base étant la même, les véhicules à faible émission de CO_2 sont les véhicules hybrides (7 %) et les véhicules électriques (4 %).

Partie B

1. Le tableau suivant est incomplet.

Véhicules VP et VUL	Augmentation des ventes de véhicules	
	de 2011 à 2012	de 2012 à 2013
Véhicules hybrides	103,9 %	…
Véhicules électriques	116 %	49,8 %

   Déterminons le pourcentage d'augmentation des ventes de véhicules hybrides de 2012 à 2013.

   D'après le document 2, en 2013 il y avait 41 340 véhicules hybrides contre 27 730 en 2012. Le taux d'augmentation est de $\dfrac{41\,340 - 27\,730}{27\,730} \approx 0{,}490\,80$.

   Le pourcentage d'augmentation des ventes de véhicules hybrides de 2012 à 2013 est d'environ 49,1 %.
2. Après un fort démarrage des ventes de véhicules hybrides, les professionnels de l'automobile envisagent une augmentation de leurs ventes de 16 % par an de 2013 à 2030.

   Le nombre de véhicules hybrides vendus en 2013 est de 41 340.

   On décide de modéliser les ventes annuelles de véhicules hybrides par une suite géométrique de raison 1,16.

   On note u_n le nombre de véhicules hybrides vendus durant l'année $2013 + n$.

   a. $u_0 = 41\,340$.

   b. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$ d'où, $u_n = 41\,340 \times (1{,}16)^n$

   c. L'augmentation de 16 % par an des ventes de véhicules hybrides permettrait d'atteindre la prévision de l'ADEME pour l'année 2030.

   En 2030, $n = 17$ et $u_{17} = 41\,340 \times (1{,}16)^{17} \approx 515\,414$.

   En 2030 il y aurait environ 515 414 véhicules hybrides vendus alors que seulement 480 000 véhicules hybrides étaient attendus.
3. Les professionnels de l'automobile s'intéressent aussi aux ventes de véhicules électriques de 2013 à 2030.

   Le nombre de véhicules électriques vendus en 2013 est de 13 954.

   a. On réalise sur tableur une feuille de calcul qui détermine le nombre de véhicules électriques vendus de 2013 à 2030 en supposant une augmentation annuelle de 16 % à partir de 2013.

	A	B
1	Année	Prévisions des ventes de voitures électriques
2	2013	13 954
3	2014	16 186,64
4	2015	18 776,502 4
5	2016	21 780,742 78
6	2017	25 265,661 63
7	2018	29 308,167 49
8	2019	33 997,474 29
9	2020	39 437,070 17
10	2021	45 747,001 4
11	2022	53 066,521 63
12	2023	61 557,165 09
13	2024	71 406,311 5
14	2025	82 831,321 34
15	2026	96 084,332 76
16	2027	111 457,826
17	2028	129 291,078 2
18	2029	149 977,650 7
19	2030	173 974,074 8

Une formule saisie dans la cellule B3 de la feuille de calcul ci-dessus pour compléter le tableau par « recopie vers le bas » est : =$B2*1,16.

b. Ce taux d'augmentation annuel ne permettrait pas d'atteindre les prévisions de l'ADEME des ventes de véhicules électriques en 2030 car il est prévu d'atteindre 240 000 véhicules électriques $\left(\dfrac{12}{100} \times 2\,000\,000\right)$.

4. Les professionnels de l'automobile cherchent un pourcentage d'augmentation annuelle des ventes de véhicules électriques qui permettrait d'atteindre les prévisions de l'ADEME en 2030.

On considère l'algorithme suivant :

Variables
  u : un nombre réel
  q : un nombre réel
Initialisation
  Affecter à u la valeur 173 974
  Affecter à q la valeur 1,16
Traitement
  Tant que $u \leqslant 240\,000$
    q prend la valeur $q + 0,01$
    u prend la valeur $13\,954 \times q^{17}$
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher $(q-1) \times 100$

a. La valeur 173 974 prise par la variable u dans l'initialisation de l' algorithme représente le nombre de véhicules électriques vendus en 2030 si le taux d'augmentation annuelle est de 0,16.

b. Complétons le tableau ci-dessous.

Étapes de l'algorithme	Variables	
	q	u
Initialisation	1,16	173 974
Étape 1	1,17	201 306
Étape 2	1,18	232 644
Étape 3	1,19	268 532

c. La valeur affichée par l'algorithme est 19. Ce résultat indique qu'il faudrait une augmentation annuelle de 19 % pour atteindre les prévisions en 2030.

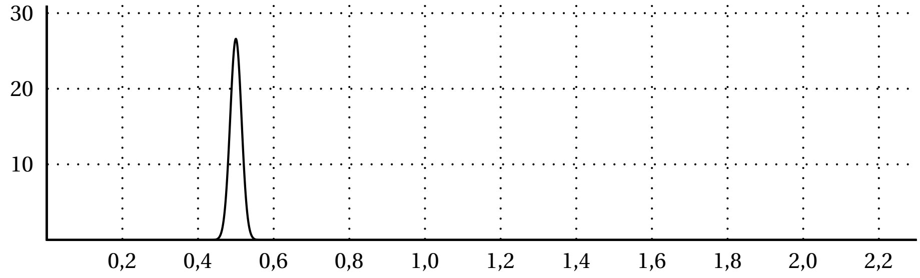
EXERCICE 4 — 5 points

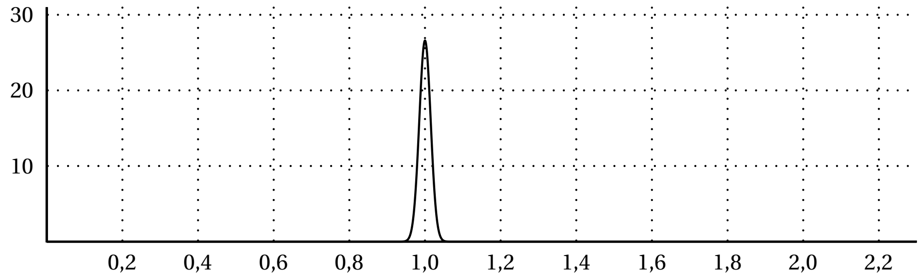
Dans l'ensemble de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} *près.*

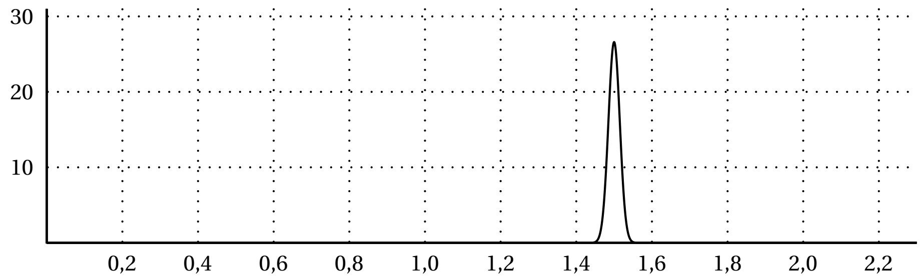
L'usine OCEFRAIS embouteille des jus de fruits. L'étiquette de la bouteille indique 1,5 litre de jus de fruits. Le volume de la bouteille est de 1, 55 litre.

À l'embouteillage, le volume de jus de fruits versé dans une bouteille est une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 1,5$ et d'écart-type $\sigma = 0,015$.

1. **a.** Celle des trois figures donnant la courbe représentative C_f de la densité f de cette loi normale est la figure 3. La courbe de densité est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$. Cette courbe semble admettre comme axe de symétrie la droite d'équation $x = 1{,}5$, valeur de μ.







b. À l'aide de la calculatrice $P(1,485 \leqslant X \leqslant 1,515) \approx 0{,}6827$.

Nous pouvions remarquer qu'il était demandé $p(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$

2. On choisit au hasard une bouteille de jus de fruits.

a. La probabilité que cette bouteille contienne exactement 1,48 litre de jus de fruits est nulle. La loi normale n'est pas une loi discrète.

b. La probabilité que cette bouteille contienne entre 1,46 litre et 1,54 litre de jus de fruits est $p(1{,}46 \leqslant X \leqslant 1{,}54)$. À l'aide de la calculatrice, nous obtenons $p(1{,}46 \leqslant X \leqslant 1{,}54) \approx 0{,}9923$.

c. La probabilité que cette bouteille déborde sur la chaîne d'embouteillage est $p(X > 1{,}55)$.
$p(X > 1{,}55) = 1 - p(X \leqslant 1{,}55) \approx 1 - 0{,}9996 \approx 0{,}004$.

3. Une bouteille est dite conforme si elle contient entre 1,46 litre et 1,54 litre de jus de fruits. Selon l'usine OCEFRAIS, la probabilité qu'une bouteille soit non conforme est 0,0077. Un supermarché achète un lot de 10 000 bouteilles.

a. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence observée de bouteilles non conformes dans un tel lot.

L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion p observée est :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ,\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$\left[0{,}0077 - 1,96\sqrt{\frac{0{,}0077(1-0{,}0077)}{10000}}\ ,\ 0{,}0077 + 1,96\sqrt{\frac{0{,}0077(1-0{,}0077)}{10000}})\right] \approx [0{,}0060\ ;\ 0{,}0094]$$

b. Dans le lot de 10 000 bouteilles, on a compté 90 bouteilles non conformes. Le gérant du supermarché trouve le nombre de bouteilles non conformes anormalement élevé.

$p = \dfrac{90}{10000} = 0{,}009$. Cette proportion de bouteilles non conformes appartient à l'intervalle de fluctuation. Par conséquent, l'usine OCEFRAIS n'a pas de raison de s'inquiéter.