Dérivée et primitives de ln(u)

Propriété 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et u une fonction strictement positive et dérivable sur I, alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I de dérivée $\ln[u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemples

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2+1)$.

➔ Le polynôme u défini par $u(x) = x^2+1$ est strictement positif et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $u'(x) = 2x$.

➔ Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln(x-2)$.

➔ Le polynôme v défini par $v(x) = x-2$ est strictement positif et dérivable sur $]2\,;+\infty[$ de dérivée $v'(x) = 1$.

➔ Donc, g est dérivable sur $]2\,;+\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Ceci nous conduit à un résultat important pour la recherche de primitives :

Propriété 2

Soit u une fonction définie et dérivable sur I.

♦ Si u est strictement positive sur I, alors les primitives de $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont de la forme $\ln[u(x)] + K$.

Exemple

Détermination de la primitive F de f,fonction définie sur $I = \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2}{2x-1}$.

➔ Le polynôme u défini par $u(x) = 2x-1$ est strictement positif et dérivable sur I de dérivée $u'(x) = 2$.

➔ Donc, f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec u stictement positive de primitive $\ln(u) + K$.

➔ $F(x) = \ln(2x-1) + K$ sur I.

Détermination de la primitive G de g, fonction définie sur $J = \left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[$ par $g(x) = \dfrac{2}{2x-1}$.

➔ Le polynôme v défini par $v(x) = 2x-1$ est strictement négatif et dérivable sur J de dérivée $v'(x) = 2$.

➔ Donc, g est de la forme $\dfrac{v'}{v}$ avec v stictement négative de primitive $\ln(-v) + L$.

➔ $G(x) = \ln(-2x+1) + L$ sur J.

Conlusion :

La fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ par $h(x) = \dfrac{2}{2x-1}$ admet donc des primitives distinctes selon l'intervalle dans lequel on se trouve.