# Définition du produit scalaire

## I) Norme d'un vecteur:

### 1) Définition:

Soit $\vec{u}$ un vecteur, A et B deux points tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

On appelle norme de $\vec{u}$ , noté $\|\vec{u}\|$, la distance AB.

$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$

Lorsque $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que le vecteur est unitaire.

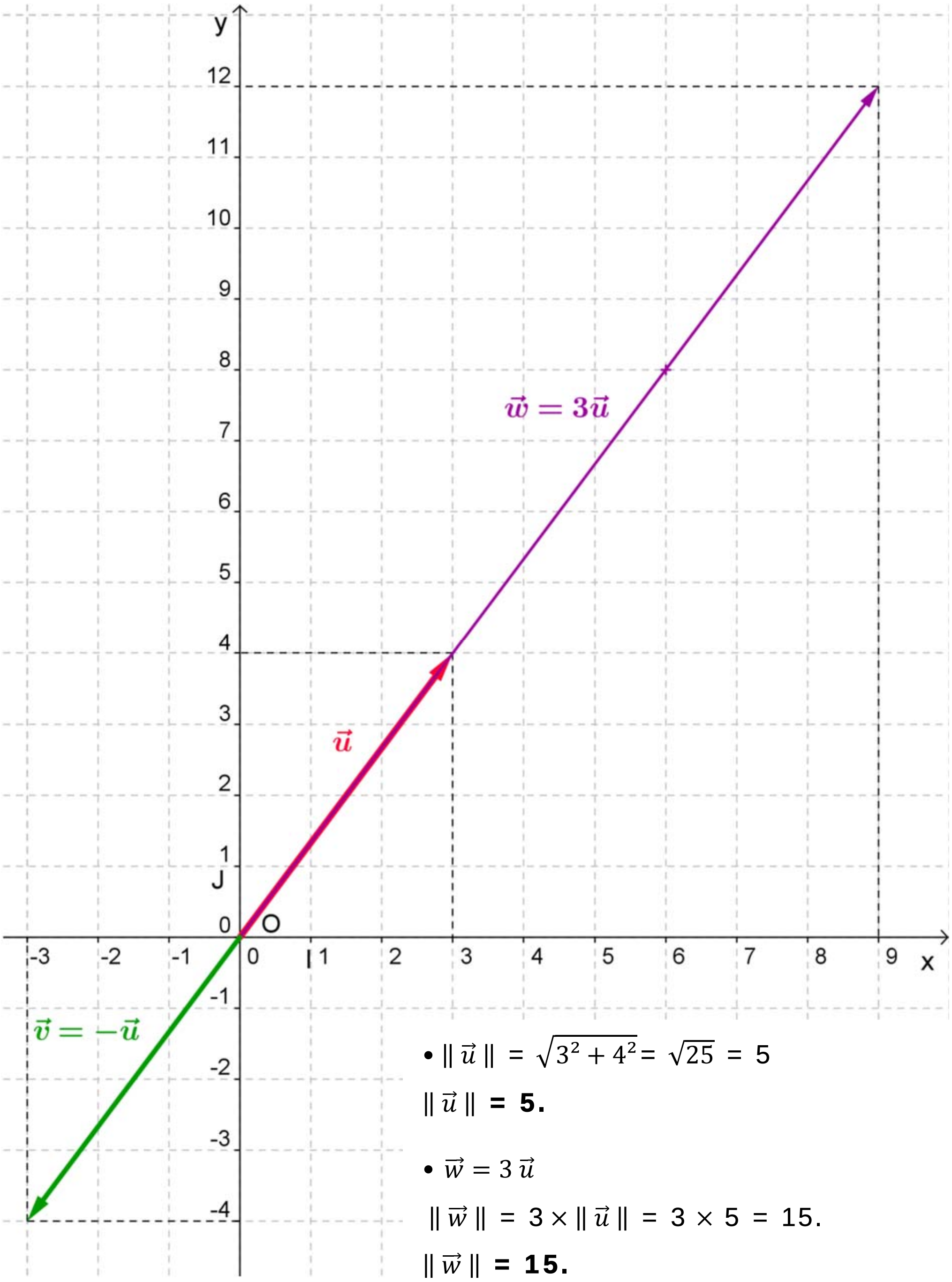
### 2) Propriétés:

Dans un repère orthonormé, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$ .

Dans ce cas :

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Pour tout réel $\lambda$, et tout vecteur $\vec{u}$ alors $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$

**Exemple:**




• $\| \vec{u} \| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\| \vec{u} \|$ **= 5.**

• $\vec{w} = 3\,\vec{u}$

$\| \vec{w} \| = 3 \times \| \vec{u} \| = 3 \times 5 = 15.$

$\| \vec{w} \|$ **= 15.**

• $\vec{v} = -\,\vec{u}$

$\| \vec{v} \| = 1 \times \| \vec{u} \| = 1 \times 5 = 5.$

$\| \vec{v} \|$ **= 5.**

# II) Définition du produit scalaire :

## 1) Définition:

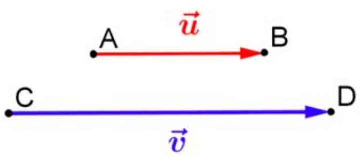
**Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan.**

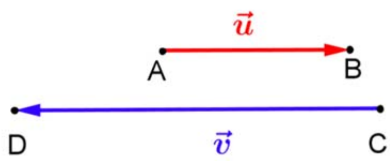
**Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel, noté :**
**$\vec{u} \cdot \vec{v}$ (lire « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » définie par :**

**• $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$ lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous les deux non nuls**

**• $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ lorsqu'au moins l'un des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul.**

**Remarques:**




• Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de même sens, alors $(\vec{u}\,,\vec{v}) = 0$ , dans ce cas $\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = 1$ et nous obtenons donc:
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD$

Ou: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

• Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $(\vec{u}\,,\vec{v}) = \pi$ dans ce cas $\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = -1$ et nous obtenons donc: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD$

Ou: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

**Autres remarques:**

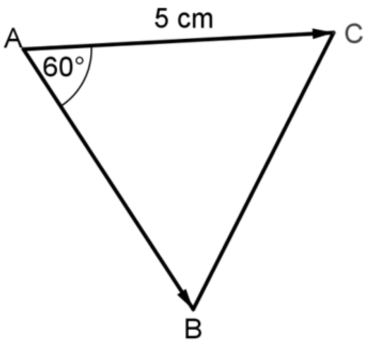
**• Par convention: $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$**

**Ainsi $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$**

**• Lorsque $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$ on obtient $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$**

**Exemples:**

**a)** ABC est un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est de 5 cm.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.




$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(60°)$$
$$= \frac{1}{2} \times AB \times AC$$
$$= \frac{1}{2} \times 5^2 = \frac{25}{2}$$

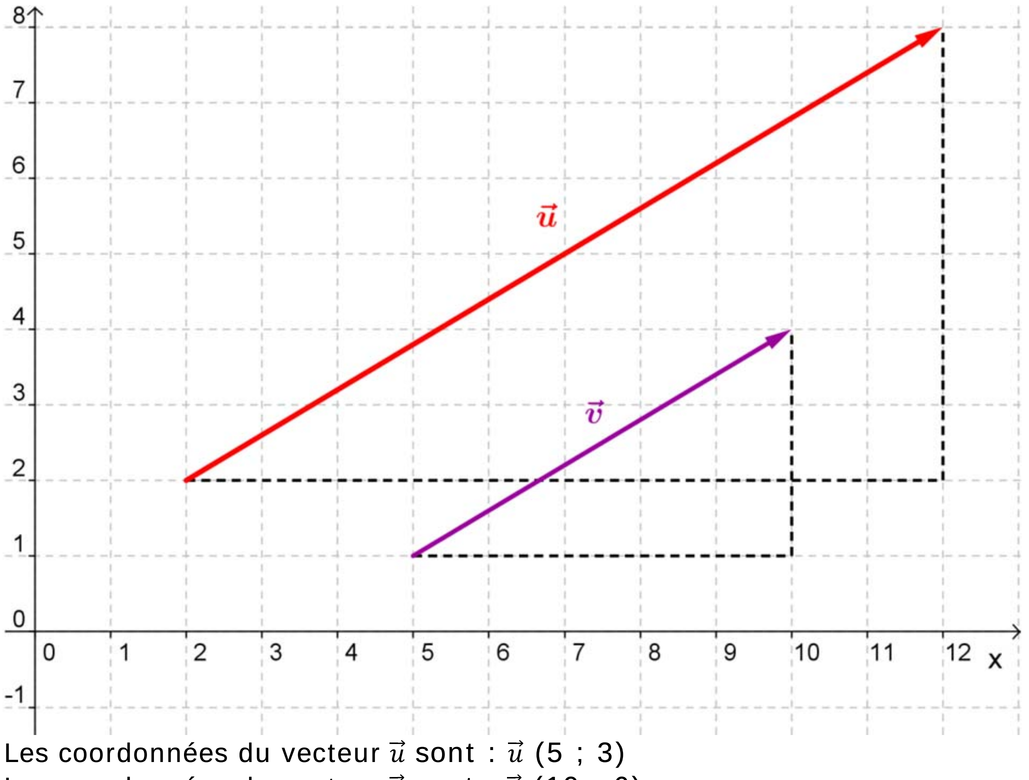
$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12{,}5}$$

**b)** Plus généralement, si ABC est un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est de $a$ cm alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(60°) = \frac{1}{2} \times a \times a$$
$$= \frac{1}{2} \times a^2$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}}$$

**c)** Déterminer le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tracés ci-dessous :




Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont : $\vec{u}$ (5 ; 3)
Les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont : $\vec{v}$ (10 ; 6)

$\|\vec{u}\|^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$ $\qquad$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{34}$

$\|\vec{v}\|^2 = 10^2 + 6^2 = 100 + 36 = 136$ $\qquad$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{136}$

$\vec{v}$ = 2 × $\vec{u}$ **Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens**

Donc $\vec{u}$ . $\vec{v}$ = $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ **=** $\sqrt{34} \times \sqrt{136}$ **=** $\sqrt{4624}$ **= 68.**

# III) Différentes formes du produit scalaire :

## 1) Produit scalaire et coordonnées

**Dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$ ), si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(x';\ y')$, alors : $\vec{u}\ .\ \vec{v}$ = $xx'$ + $yy'$.**

**Exemple:** Dans un repère (O, $\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$ ), les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(-2;\ 5)$ et $(3;\ 1)$. Calculons leur produit scalaire.

$\vec{u}$ . $\vec{v}$ = $(-2) \times 3$ + 5 × 1 = -6 + 5 = -1

On obtient donc :

$\vec{u}$ . $\vec{v}$ = -1

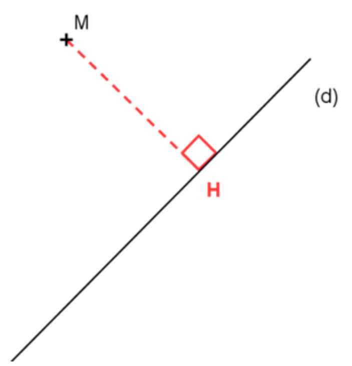
## 2) Produits scalaires et projection orthogonale

### a) Projection orthogonale:

**Définition :**

**(d) est une droite et M un point du plan.**

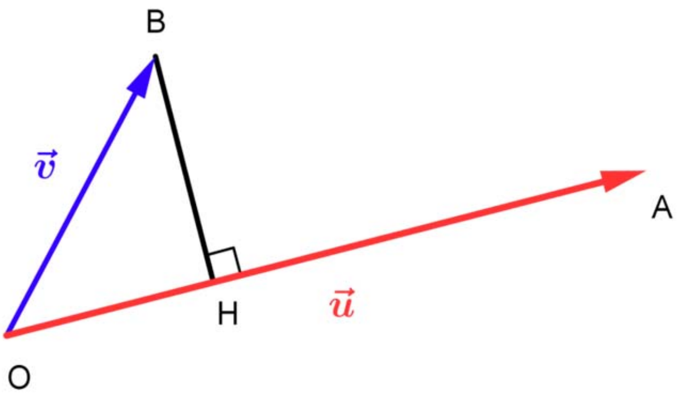
**Le projeté orthogonal de M sur la droite (d) est le point H intersection de la perpendiculaire à (d) passant par le point M et de (d).**



## b) Produit scalaire et projeté orthogonal

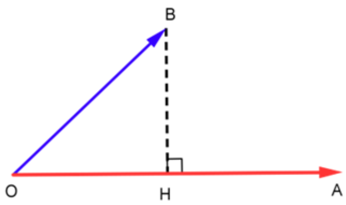
• **Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$**

**Alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) .**



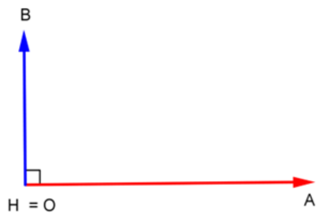

**Remarques :**

L'angle $\widehat{AOB}$ est aigu



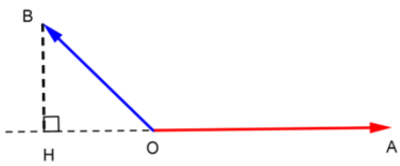

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OH$

L'angle $\widehat{AOB}$ est droit




$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$

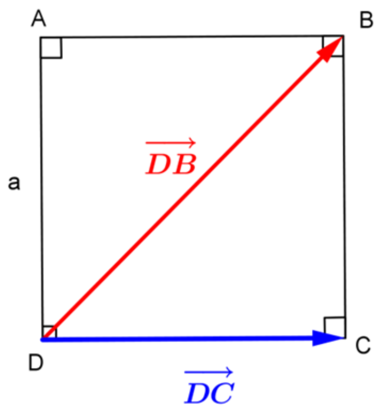
L'angle $\widehat{AOB}$ est obtus




$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -OA \times OH$

**Exemples :**

**Exemple 1 :**




ABCD est un carré dont la longueur des côtés est $a$ cm. Le projeté orthogonal de B sur la droite (DC) est le point C.
Donc $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC}^2 = a^2$

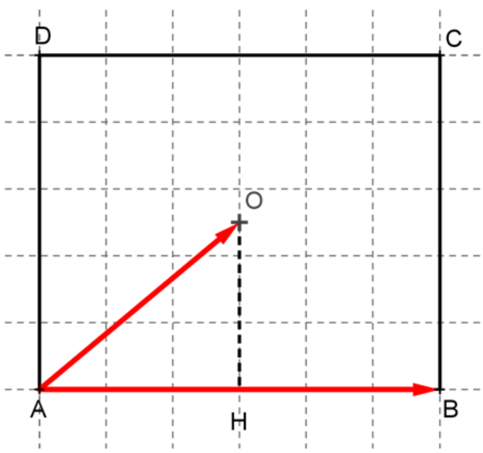
**Exemple 2 :**

**ABCD est un rectangle de centre O avec AB = 6 cm et AD = 5 cm.**

En utilisant les projections orthogonales, calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

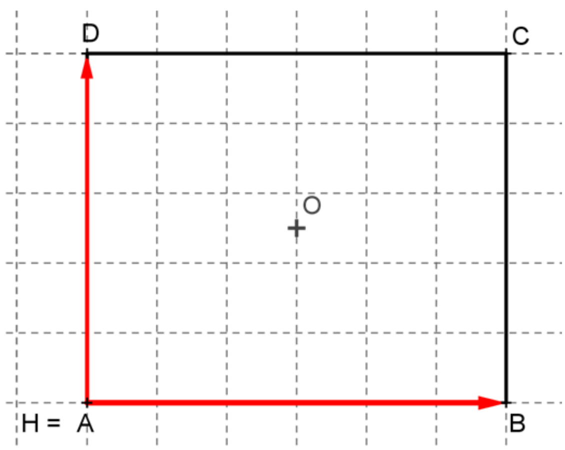
**Réponses :**




Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens. Donc :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ = AB×AH = 6 × 3 =18

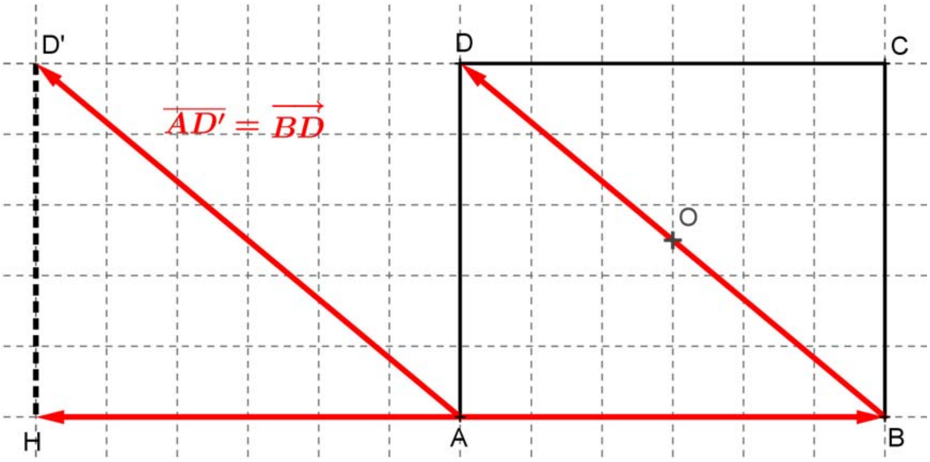
$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = 18}$




Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.

Donc $\overrightarrow{AH}$ est le vecteur nul:

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0}$




Dans ce cas, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires donc :

$\overrightarrow{AB}$ . $\overrightarrow{BD}$ = $\overrightarrow{AB}$ . $\overrightarrow{AD}$' = –AB×AH = – 6×6 = – 36

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$ **.** $\boldsymbol{\overrightarrow{BD}}$ **=– 36**

## IV) Exemple d'utilisation des différentes formes du produit scalaire

**Exemple :**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

A(-6 ; -2)    B-(2 ;0)    et    C(-2 ; 4)

En utilisant les différentes formes du produit scalaire, déterminer la valeur approchée à 0,1 ° près de l'angle $\widehat{BAC}$

**Réponse :**

***Comme nous connaissons les coordonnées des points A , B et C , nous allons calculer*** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ***grâce à la forme analytique du produit scalaire.***

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}$(–2 + 6 ; 0 + 2)    $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$**(4 ;  2)**

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont : $\overrightarrow{AB}$(–2 + 6 ; 4 + 2)    $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$**(4 ; 6)**

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = 4 × 4 + 2 × 6 = 28

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}$ **= 28**

***Comme nous cherchons la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$, nous allons utiliser la formule du produit scalaire avec les normes et un angle , afin d' avoir une nouvelle expression de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dont nous connaissons maintenant la valeur.***

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = $\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2+6^2} = \sqrt{52}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \sqrt{20} \times \sqrt{52} \times \cos(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})$

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \sqrt{1040} \times \cos(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})}$

**Or nous avions trouvé précédemment que : $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 28}$**

Donc $\sqrt{1040} \times \cos(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = 28$

Donc $\cos(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \dfrac{28}{\sqrt{1040}}$

***La connaissance du cosinus de l'angle ($\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AC}$) ne permet pas de connaitre le sens et la mesure de l'angle orienté ($\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AC}$).***

***Par contre on peut en déduire la mesure de l'angle géométrique :***

$\boldsymbol{\widehat{BAC} \approx 75,6°}$