1. Limite en zéro

Définition 1
On dit qu'une fonction f a pour <u>limite</u> 0 en 0 si $f(h)$ se rapproche de 0 dès que h est assez petit.

On note : $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = 0$

Les fonctions suivantes ont comme limite 0 en 0 :

$\lim\limits_{h \to 0} h = 0$

$\lim\limits_{h \to 0} h^2 = 0$

$\lim\limits_{h \to 0} h^3 = 0$

$\lim\limits_{h \to 0} \sqrt{h} = 0$

Exemple 1

➔ $\lim\limits_{h \to 0} h + h^2 + h^3 = 0$

➔ $\lim\limits_{h \to 0} 3h^2 - 4h = 0$

➔ $\lim\limits_{h \to 0} -2h^3 + \sqrt{h} - 1 = -1$

2. Taux de variation

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, C sa courbe représentative dans un repère
a et x sont deux réels distincts de I

Définition 2
Le <u>taux de variation</u> de la fonction f entre a et x est le quotient :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Avec $x = a + h$, ce quotient s'écrit aussi : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Exemple 2
Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, le taux de variation de f entre a et $a + h$ est :

➔ $$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h}$$

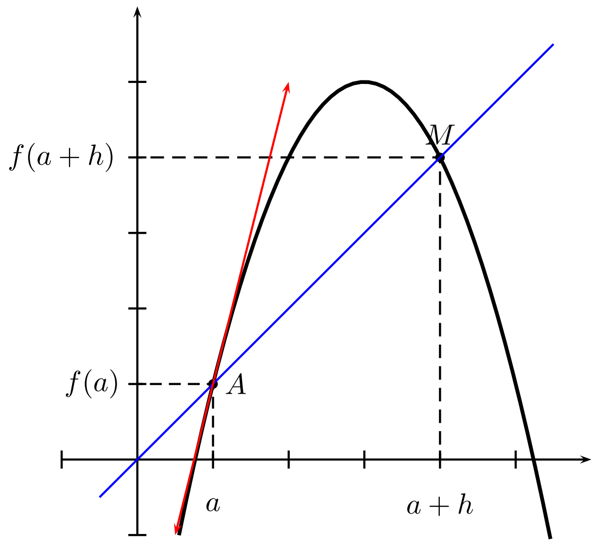
➔ $$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a + h$$

3. Nombre dérivé

Définition 3
On dit que f est <u>dérivable</u> en a et on note cette dérivée $f'(a)$ si la limite suivante existe :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interprétation graphique :
Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche de A, et la droite (AM) se rapproche de la tangente à C au point A
Ainsi, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse a



Exemple 3
Pour f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, calculer le nombre dérivé de f en 3 puis en -1 :

- ➔ $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a + h$ d'après l'exemple 1
- ➔ $f'(a) = \lim_{h \to 0} 2a + h = 2a$
- ➔ $f'(3) = 2 \times 3 = 6$
- ➔ $f'(-1) = 2 \times (-1) = -2$

4. Fonction dérivée

Définition 4
Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelée <u>fonction dérivée</u> *de f sur I. On la note f'*

On obtient le tableau de dérivation suivant :

Fonction f	Fonction f'	Ensemble de définition de f
k	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$ si $n<0$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Exemple 4
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- ➔ $f(x)=-2$ $f'(x)=0$
- ➔ $f(x)=\pi$ $f'(x)=0$
- ➔ $f(x)=3x-2$ $f'(x)=3$
- ➔ $f(x)=-x+2$ $f'(x)=-1$
- ➔ $f(x)=x$ $f'(x)=1$
- ➔ $f(x)=x^2$ $f'(x)=2x$
- ➔ $f(x)=x^3$ $f'(x)=3x^2$
- ➔ $f(x)=x^{2007}$ $f'(x)=2007x^{2006}$

5. Opérations sur les fonctions dérivables

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication par un nombre	$k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$
Multiplication	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Carré	u^2	$2 \times u \times u'$
Divison	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Inverse	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Fonction composée	$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

Exemple 5
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

➔ $f(x) = x^3 + x + 3$: On utilise la formule $(u+v)' = u' + v'$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x + 3$
on obtient $f'(x) = 3x^2 + 1$

➔ $f(x) = 3(x^2 + 4)$: on utilise la formule $(ku)' = ku'$ avec $k = 3$ et $u(x) = x^2 + 4$
on obtient $f'(x) = 6x$

➔ $f(x) = (2x - 7)^2$: on utilise la formule $(u^2)' = 2uu'$ avec $u(x) = 2x - 7$
on obtient $f'(x) = 4(2x - 7)$

➔ $f(x) = (-2x + 3)(5x - 3)$: On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = -2x + 3$ et $v(x) = 5x - 3$
on obtient $f'(x) = -20x + 21$

➔ $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^2 + 3}$: On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 3x - 4$ et $v(x) = x^2 + 3$
on obtient $f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 8x + 9}{(x^2 + 3)^2}$

➔ $f(x) = \dfrac{1}{-3x + 1}$: On utilise la formule $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = -3x + 1$
on obtient $f'(x) = \dfrac{3}{(-3x + 1)^2}$

➔ $f(x) = \cos(2x + 1)$: On utilise la formule $[f(ax + b)]' = af'(ax + b)$ avec $f(x) = \cos(x)$ et $ax + b = 2x + 1$
on obtient $f'(x) = -2\sin(2x + 1)$

6. Equation de la tangente

Propriété 2
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$
La tangente T_a en à la courbe C_f en a a pour équation :

$$T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple 6
Soit $f(x) = x^2 + 2$. Déterminer l'équation de la tangente en 0 et en -1

➔ $f'(x) = 2x$
➔ $f'(0) = 0$ donc $T_0 : y = 0 \times (x - 0) + f(0) = 2$
➔ $f'(-1) = -2$ donc $T_{-1} : y = -2 \times (x + 1) + f(-1) = -2x + 1$