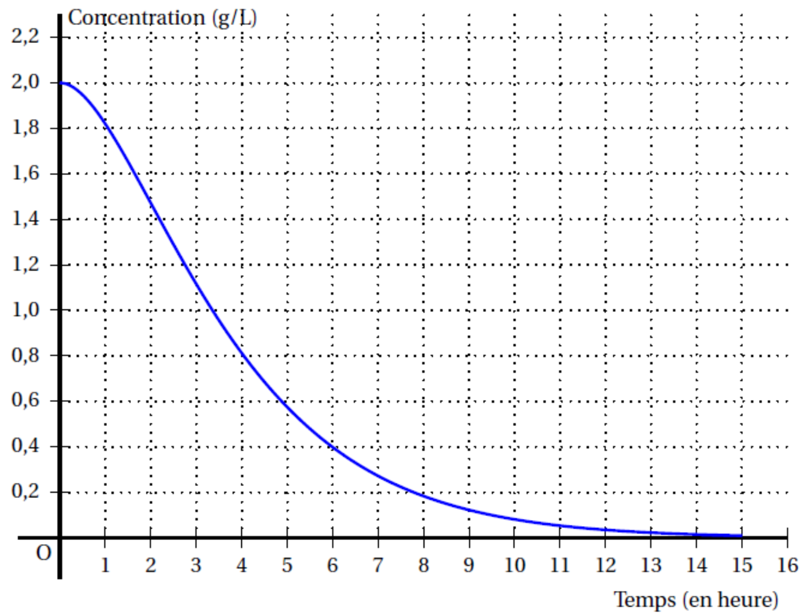
Exercice 1: 10 points

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie ci-dessous :



A. Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1) la concentration à l'instant initial ;

2) l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à $0,4$ gramme par litre.

On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. Étude théorique :

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 15]$ par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Justifier que $f'(x) = -0,5x\mathrm{e}^{-0,5x}$

2) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ 15]$.

3) Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;15]$.

4) On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à $0,1$ gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?

Exercice 2: 10 points

Dans ce problème, on se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

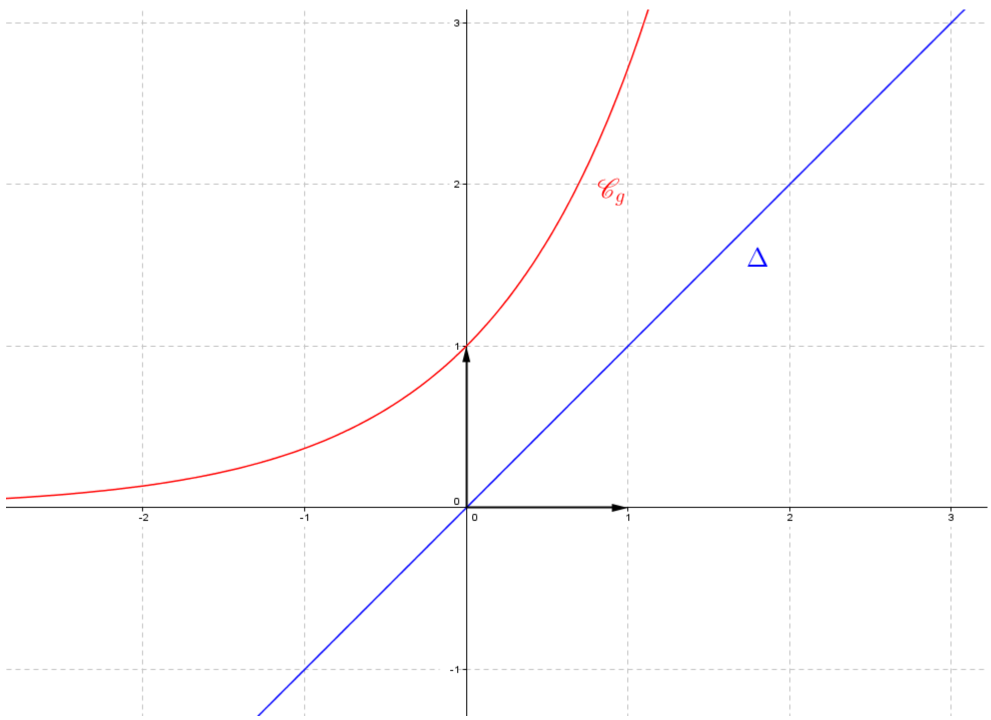
$$f(x) = 2e^x - x^2 + 3$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; I; J)$(unité graphique 1 cm).

1) On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x \qquad \text{et} \qquad h(x) = x$$

On donne ci-dessous leurs représentations graphiques $\mathscr{C}_g$ et Δ.



Par lecture graphique, donner le signe de $e^x - x$.

2) a) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

b) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Pour cela, on écrira, pour tout $x \neq 0$, $f(x)$ sous la forme $f(x) = x^2\left(\dfrac{2e^x}{x^2} - 1\right) + 3$.

3) a) Calculer la dérivée f' de f et étudier le signe $f'(x)$ à l'aide de la question 1.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

5) Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$.