

Kit de survie du lycéen: Ce qu'il faut connaître en priorité

1) Inégalités - Étude du signe d'une expression

a) Opérations sur les inégalités

Règles usuelles :

| | | |
|---------------------------------|---|-----------------------|
| Pour tout a : | $x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$ | <i>même sens</i> |
| Pour tout $k > 0$: | $x < y \Rightarrow kx < ky$ | <i>même sens</i> |
| Pour tout $k < 0$: | $x < y \Rightarrow kx > ky$ | <i>sens contraire</i> |
| Pour x et y de même signe : | $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ | <i>sens contraire</i> |
| Pour $x > 0$ et $y > 0$: | $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$ | <i>même sens</i> |
| Pour $x > 0$ et $y > 0$: | $x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$ | <i>même sens</i> |
| Si f croissante * : | $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ | <i>même sens</i> |
| Si f décroissante * : | $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ | <i>sens contraire</i> |

(* sur un intervalle contenant x et y)

► Exemple :

- Sachant que $3 < x < 5$, que peut-on en conclure pour $\frac{1}{3-x}$?
- $$3 < x < 5 \Rightarrow -5 < -x < -3 \Rightarrow -2 < 3-x < 0 \Rightarrow \frac{1}{3-x} < -\frac{1}{2}$$

b) Inégalités classiques

Pour tout x : $-1 \leq \cos x \leq 1$; $-1 \leq \sin x \leq 1$.

c) Signe de $ax + b$ ($a \neq 0$)

On détermine la valeur de x qui annule $ax + b$, puis on applique la règle : « signe de a après le 0 ».

| | | | |
|----------|-----------------|----------------|--------------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
| $ax + b$ | signe de $(-a)$ | 0 | signe de a |

d) Signe de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

On calcule la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (sauf cas évidents)

- Si $\Delta < 0$, on applique la règle : « toujours du signe de a ».

| | | |
|-----------------|--------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $ax^2 + bx + c$ | signe de a | |

- Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\frac{b}{2a}$.

On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$ ».

| | | | |
|-----------------|--------------|-------|--------------|
| x | $-\infty$ | x_1 | $+\infty$ |
| $ax^2 + bx + c$ | signe de a | 0 | signe de a |

- Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

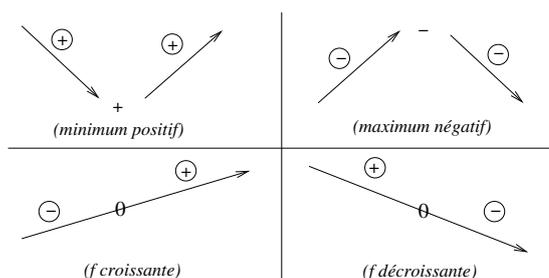
On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

| | | | | | |
|-----------------|--------------|-------|-----------------|-----------|--------------|
| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ | |
| $ax^2 + bx + c$ | signe de a | 0 | signe de $(-a)$ | 0 | signe de a |

(on suppose que $x_1 < x_2$)

e) Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Les cas les plus classiques :



f) Pour les autres expressions :

Pour étudier le signe d'une expression $A(x)$ (qui n'est pas du premier, ni du second degré et après avoir factorisé au maximum) sur un intervalle I , on résout l'inéquation $A(x) \geq 0$ (on cherche ce qui annule l'expression et où mettre le(s) signe(s) +).

► Exemple : Étude du signe de $(3 - \ln x)$ sur $I =]0; +\infty[$.

$$3 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 3 \geq \ln x \Leftrightarrow \ln(e^3) \geq x \Leftrightarrow e^3 \geq x.$$

On en conclut que l'expression s'annule pour $x = e^3$ et qu'il faut mettre le signe + pour $0 < x < e^3$:

| | | | |
|-------------|-----|-------|-----------|
| x | 0 | e^3 | $+\infty$ |
| $3 - \ln x$ | | + | 0 - |

2) Étude de fonction

a) Limites

• Limite d'une somme :

| | | |
|---|---|---|
| $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l'} \rightarrow l + l'$ | $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$ | $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$ |
| $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$ | $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$ | |

• Limite d'un produit :

| | | |
|--|--|--|
| $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l'} \rightarrow l \times l'$ | $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l > 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$ | $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l < 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow -\infty$ |
| $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l > 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$ | $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l < 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow +\infty$ | $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$ |
| $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow +\infty$ | $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow -\infty$ | |

• Limite de l'inverse :

| | | | |
|--|---|---|---|
| $\left(\frac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l \neq 0}} \right) \rightarrow \frac{1}{l}$ | $\left(\frac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow \pm\infty}} \right) \rightarrow 0$ | $\left(\frac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow 0^+}} \right) \rightarrow +\infty$ | $\left(\frac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow 0^-}} \right) \rightarrow -\infty$ |
|--|---|---|---|

• Limite d'un quotient :

Pour les quotients (autres que les fonctions rationnelles en $\pm\infty$), on « sépare la fraction » : $\frac{(\quad)}{(\quad)} = (\quad) \times \frac{1}{(\quad)}$

• **Formes indéterminées :**

Les deux cas de forme indéterminée sont : $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty}$; $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow \pm\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow 0}$

• **Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$:**

- En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur (*ne pas oublier de simplifier le quotient des termes de plus haut degré avant de déterminer la limite*).

b) **Asymptotes**

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f .
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$.

c) **Position relative de deux courbes**

- Pour déterminer la position relative entre deux courbes C_f et C_g , on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ (méthode aussi valable pour les asymptotes horizontales) :
- si $f(x) - g(x) \geq 0$ pour tout x d'un intervalle I , alors C_f est située au dessus de C_g sur I .
 - si $f(x) - g(x) \leq 0$ pour tout x d'un intervalle I , alors C_f est située en dessous de C_g sur I .

d) **Dérivation**

• **Dérivées des fonctions usuelles :**

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$ | $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$ | $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ |
| $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ | $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$ | $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ | $f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{x^4}$ | $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$ | $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$ | |

• **Opérations sur les fonctions dérivables :**

| Fonction | Fonction dérivée | Fonction | Fonction dérivée |
|-------------------|------------------|---------------|---------------------------|
| $f + g$ | $f' + g'$ | f^2 | $2 f' f$ |
| $k f$ (k réel) | $k f'$ | $\frac{1}{f}$ | $-\frac{f'}{f^2}$ |
| $f g$ | $f' g + f g'$ | $\frac{f}{g}$ | $\frac{f' g - f g'}{g^2}$ |

e) **Tangente**

- Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ (le coefficient directeur de la tangente est égale à la valeur de la dérivée)
- Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à m , il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = m$.

3) **Fonctions logarithme népérien et exponentielle**

a) **Existence**

- $\ln x$ n'existe que si $x > 0$.
- e^x existe pour tout réel x .

► **Exemple :**

La fonction f définie par $f(x) = \ln(x - 1)$ n'est définie que sur $]1 ; +\infty[$ car il faut que $x - 1$ soit strictement positif.

b) Lien entre $\ln x$ et e^x

- $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$
- $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$)

c) Valeurs particulières

- $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-1} = \frac{1}{e}$

d) Propriétés algébriques

Si $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Pour tout entier n , $\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

Pour tous réels a et b :

$$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad ; \quad \frac{1}{e^a} = e^{-a} \quad ; \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^a)^n = e^{an}$

► *Exemples :*

Si $x > 0$, $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\ln(x^2) = -2 \ln x$

Pour tout x , $(e^{-x})^2 \times e^{3x} = e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$

e) Signe de $\ln x$ et de e^x

- **Signe de $\ln x$:**
Si $0 < x < 1$ alors $\ln x$ est strictement négatif.
Si $x > 1$ alors $\ln x$ est strictement positif.
 $\ln 1 = 0$.
- **Signe de e^x :** pour tout réel x , e^x est strictement positif.

f) Équations et inéquations

- Si $a > 0$ et $b > 0$:
 $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$; $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$
- $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$; $\ln x < a \Leftrightarrow 0 < x < e^a$; $\ln x > a \Leftrightarrow x > e^a$
- Si $a > 0$: $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$; $e^x < a \Leftrightarrow x < \ln a$; $e^x > a \Leftrightarrow x > \ln a$

► *Remarque :*

Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

► *Exemples d'équations et d'inéquations :*

• $\ln x + \ln 2 = 5$. Condition d'existence : $x > 0$.

Avec cette condition :

$$\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \frac{e^5}{2}. \quad S = \left\{ \frac{e^5}{2} \right\}$$

• $\ln(x+2) \leq 1$. Condition d'existence : $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

Avec cette condition :

$$\ln(x+2) \leq 1 \Leftrightarrow x+2 \leq e \Leftrightarrow x \leq e-2. \quad S =]-2; e-2]$$

• $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X = e^x$.

$\Delta = 16$; $X = -1$ ou $X = 3$.

D'où, $e^x = -1$ (impossible) ou $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. $S = \{\ln 3\}$

• $e^x < 5e^{-x} \Leftrightarrow e^x < \frac{5}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} < 5$ (car $e^x > 0$) $\Leftrightarrow 2x < \ln 5 \Leftrightarrow x < \frac{\ln 5}{2}$. $S =]-\infty; \frac{\ln 5}{2}[$.

g) Limites

Situation en $+\infty$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- Pour tout entier $n > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$
(on dit que x^n est plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- Pour tout entier $n > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
(on dit que e^x est plus fort que x^n en $+\infty$: on en déduit que e^x est aussi plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)

Méthode générale en cas de FI en $+\infty$: Mettre le plus fort en facteur en haut et en bas.

► *Exemples :*

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^x - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(3 - \frac{x^2}{e^x} \right) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{e^x} = 1$

Situation en 0 :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$
- Pour tout entier $n > 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \times \ln x = 0$

Méthode générale en cas de FI en 0 avec un logarithme : on essaie de faire apparaître $x^n \times \ln x$.

► *Exemple :*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} + \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} (1 + x \ln x) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$$

Situation en $-\infty$:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- Pour tout entier $n > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \times e^x = 0$

Méthode générale en cas de FI en $-\infty$ avec un exponentiel : on essaie de faire apparaître $x^n \times e^x$.

► *Exemple :* $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x + e^x = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

h) Dérivées

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ ($u > 0$)
- $(e^x)' = e^x$; $(e^u)' = u' e^u$

► *Exemples :*

$$[\ln(x^2 + 1)]' = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad ; \quad [e^{-x}]' = -e^{-x}$$

i) Puissances

- Pour tous réels a et b avec $a > 0$: $a^b = e^{b \ln a}$; $\ln(a^b) = b \ln a$
- Pour tout réel $k > 0$: $x^\alpha = k \Leftrightarrow x = k^{\frac{1}{\alpha}}$ (dans $]0; +\infty[$)

► *Exemples :*

- $2^x = 5 \Leftrightarrow \ln(2^x) = \ln 5 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 5 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

- $x^{0,9} = 10 \Leftrightarrow x = 10^{\frac{1}{0,9}} = e^{\left(\frac{1}{0,9} \times \ln 10\right)}$
- Pour tout x , $(3^x)' = (e^{x \ln 3})' = \ln 3 \times e^{x \ln 3} = \ln 3 \times 3^x$.

4) Primitives

- F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.
- Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réelle.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

- **Primitives des fonctions usuelles :** (F représente une primitive de f)

| | |
|--|---|
| $f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax$ | $f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$ |
| $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$ | $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{x}$ | $f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2x^2}$ |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x}$ | |
| $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln x$ | $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$ |
| $f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x$ | $f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x$ |
| $f(x) = \sin(ax + b) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$ | $f(x) = \cos(ax + b) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b)$ |

- **Formules générales :**

| forme de f | une primitive de f | exemples |
|------------------------------------|----------------------|---|
| $U' U$ | $\frac{U^2}{2}$ | $f(x) = \cos x \times \sin x \Rightarrow F(x) = \frac{(\sin x)^2}{2}$ |
| $U' U^2$ | $\frac{U^3}{3}$ | $f(x) = 4(4x + 1)^2 \Rightarrow F(x) = \frac{(4x + 1)^3}{3}$ |
| $\frac{U'}{U^2}$ ($U(x) \neq 0$) | $-\frac{1}{U}$ | $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3 + 1)^2} \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{x^3 + 1}$ |
| $\frac{U'}{U^3}$ ($U(x) \neq 0$) | $-\frac{1}{2U^2}$ | $f(x) = \frac{7}{(7x + 1)^3} \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{2(7x + 1)^2}$ |
| $\frac{U'}{U}$ ($U(x) > 0$) | $\ln U$ | $f(x) = \frac{4}{(4x + 1)} \Rightarrow F(x) = \ln(4x + 1)$ |
| $U' e^U$ | e^U | $f(x) = -e^{-x} \Rightarrow F(x) = e^{-x}$ |

- **Recherche pratique d'une primitive :**

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.

Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

► *Exemple :* Soit f définie par $f(x) = e^{3x+4}$. On pense à la forme $U' e^U$ (dont une primitive est e^U).

On écrit que $f(x) = \frac{1}{3} \times \underbrace{3e^{3x+4}}_{\text{forme exacte}}$. Une primitive de f est donc F définie par $F(x) = \frac{1}{3} e^{3x+4}$.

5) Calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :

- Pour tous a et b de I :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

► *Exemple :*

$$\int_0^{\ln 2} 3e^{3x} dx = [e^{3x}]_0^{\ln 2} = e^{3 \ln 2} - e^0 = e^{\ln(2^3)} - 1 = e^{\ln(8)} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Propriétés de l'intégrale :

Pour f et g continues sur un intervalle I et pour a, b et c de I :

- $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.
- $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ (Relation de Chasles)
- $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ (linéarité de l'intégrale)
- Pour tout réel k , $\int_a^b (kf)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (linéarité de l'intégrale)
- Si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$
- Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Si f est continue sur $[a, b]$, la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est égale à $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Calculs d'aires

f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$.

- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b g(x) - f(x) dx$ en **unités d'aire**.

(« intégrale de la plus grande moins la plus petite »)

- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x) dx$ en **unités d'aire**.
- Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $-\int_a^b f(x) dx$ en **unités d'aire**.

► Remarques :

- Pour avoir l'aire en cm^2 , il faut multiplier le résultat en unités d'aire par :
(la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses) \times (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées).
- Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord connaître leur position relative sur l'intervalle en question afin de savoir quelle est « la plus grande » et « la plus petite ».

6) Suites

a) Suites géométriques

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre q appelé raison de la suite.

- Pour tout n : $U_{n+1} = q \times U_n$; $U_n = q^n \times U_0$; $U_n = q^{n-p} \times U_p$
- Si pour tout n , $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \text{constante}$ alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.

$$\bullet U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = U_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

(pour $q \neq 1$)

► Exemple :

Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $b = 2$.

$$U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80 ; \quad U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$$

Pour tout n , $U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$.

$$U_0 + U_1 + \dots + U_8 = 5 \times \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 2555.$$

b) Limite de q^n avec $q > 0$

- si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.

► *Exemples :*

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3})^n = +\infty$ car $\sqrt{3} > 1$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times (1 - (\frac{1}{2})^n) = 3$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - (\frac{1}{2})^n = 1$.

c) Détermination du plus petit entier n tel que $q^n \geq a$ (si $q > 1$) ou tel que $q^n \leq a$ (si $0 < q < 1$)

Méthode : on isole q^n et on utilise que $\ln(q^n) = n \ln q$.

► *Exemples :*

- Recherche du plus petit entier n tel que $2^n \geq 3000$:

$$2^n \geq 3000 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln(3000) \Leftrightarrow n \ln 2 \geq \ln 3000 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 3000}{\ln 2} \text{ (car } \ln 2 > 0 \text{)}.$$

Or $\frac{\ln 3000}{\ln 2} \approx 11,55$. Le plus petit entier qui convient est donc 12.

- Recherche du plus petit entier n tel que $0,8^n \leq 0,01$:

$$0,8^n \leq 0,01 \Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \ln 0,8 \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \text{ (car } \ln 0,8 < 0 \text{)}.$$

Or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,64$. Le plus petit entier qui convient est donc 21.

7) Équations différentielles

a) Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

- Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions f définies par $f(x) = k e^{-ax}$.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions f définies par $f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a}$.

► *Exemple :* Résolution de $y' + 4y = 8$ ($a = 4$; $b = 8$)

- Les solutions sont définies par $f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a} = k e^{-4x} + \frac{8}{4} = k e^{-4x} + 2$.

- Recherche de la solution particulière telle que $f(0) = 1$:

Cela revient à déterminer k tel que $f(0) = 1 \Leftrightarrow k e^0 + 2 = 1 \Leftrightarrow k = -1$.

La solution particulière cherchée est donc définie par $f(x) = -e^{-4x} + 2$.

b) Équations différentielles de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions f définies par $f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$.

► *Exemple :* Résolution de $y'' + 4y = 0$ (on a $\omega^2 = 4$: on peut prendre $\omega = 2$)

- Les solutions sont définies par $f(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$.

- Recherche de la solution particulière telle que $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 2$:

$$f(0) = \sqrt{3} \Leftrightarrow A \cos 0 + B \sin 0 = \sqrt{3} \Leftrightarrow A = \sqrt{3}.$$

Pour tout x , on a $f'(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$.

$$f'(0) = 2 \Leftrightarrow -2A \sin 0 + 2B \cos 0 = 2 \Leftrightarrow 2B = 2 \Leftrightarrow B = 1.$$

La solution cherchée est définie par $f(x) = \sqrt{3} \cos(2x) + \sin(2x)$.

8) Complexes

a) Forme algébrique - Calculs dans \mathbb{C}

- Tout complexe s'écrit de façon unique sous la **forme algébrique** $z = a + ib$ (a et b réels) avec $i^2 = -1$.
- a est la **partie réelle** et b est la **partie imaginaire**.
- Le conjugué de z est $\bar{z} = a - ib$.
- Pour écrire un quotient de complexes sous forme algébrique :
 - si le dénominateur est de la forme ib , on multiplie en haut et en bas par i ;
 - si le dénominateur est de la forme $a + ib$, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.

► Exemples de calculs dans \mathbb{C} :

- $3i(3 + 4i) = 3i + 12i^2 = -12 + 3i$
- $(1 + 2i)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 2i + (2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$
- $\frac{3}{i} = \frac{3}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{3i}{-1} = -3i$
- $\frac{2 + i}{3 + 2i} = \frac{(2 + i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{6 - 4i + 3i - 2i^2}{3^2 + 2^2} = \frac{8 - i}{13}$
- Résolution de l'équation $\frac{1 + iz}{-1 + 3i} = z : \frac{1 + iz}{-1 + 3i} = z \Leftrightarrow 1 + iz = (-1 + 3i)z$
 $\Leftrightarrow 1 = (-1 + 2i)z \Leftrightarrow z = \frac{1}{-1 + 2i} = \frac{1}{-1 + 2i} \times \frac{-1 - 2i}{-1 - 2i} = \frac{-1 - 2i}{1^2 + 2^2} = \frac{-1 - 2i}{5}$.

Propriétés sur les conjugués :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' ; \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}' ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0).$$

b) Forme trigonométrique - Module et arguments

Pour $z = a + ib$ (a et b réels) :

- Le **module** de z est : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Si $z \neq 0$, tout réel θ tel que
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{\text{partie réelle}}{\text{module}} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{\text{partie imaginaire}}{\text{module}} \end{cases}$$

est un **argument** de z . On note $\arg z = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

- Pour tout θ , on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
- $|e^{i\theta}| = 1$; $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$; $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$
- Si un complexe non nul admet r comme module et θ comme argument alors $z = r e^{i\theta}$ (**forme trigonométrique** ou **forme exponentielle**)
- Si $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $\arg z = \theta + 2k\pi$.
- $r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'}$ (avec $r > 0$ et $r' > 0$) $\Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$.

► Exemple de passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :

$$\text{Soit } z = \sqrt{3} + i. \quad |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2. \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}. \text{ D'où } z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

► Exemple de passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :

$$z = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}.$$

► *Autres exemples classiques d'utilisation de la forme trigonométrique :*

- *Calcul de $(1 - i)^{12}$. Il est hors de question de faire le calcul sous forme algébrique.*

On détermine d'abord la forme trigonométrique de $z = 1 - i$:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}. \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}. \text{ D'où } z = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$$(1 - i)^{12} = z^{12} = (\sqrt{2})^{12} e^{-i\frac{12\pi}{4}} = 64 e^{-i3\pi} = 64 (\cos(-3\pi) + i \sin(-3\pi)) = -64$$

- *Soit $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$. Calculer la forme trigonométrique de z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.*

En calculant le module et un argument de z_1 et z_2 , on montre que $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et que $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. On en déduit que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{12}}. \text{ Ainsi } \frac{\pi}{12} \text{ est un argument de } \frac{z_1}{z_2}.$$

$$\text{Or, } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{3} + i} = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\sqrt{3} - i)}{4} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}.$$

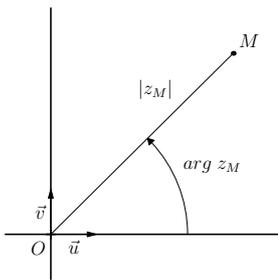
$$\text{Donc, } \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\text{partie réelle de } \frac{z_1}{z_2}}{\text{module de } \frac{z_1}{z_2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\text{partie imaginaire de } \frac{z_1}{z_2}}{\text{module de } \frac{z_1}{z_2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

c) Complexes et géométrie

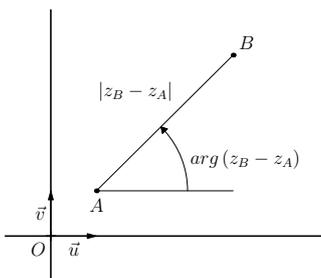
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

- L'affixe du point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $z_M = x + iy$.
- L'affixe du milieu I de $[AB]$ est $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- L'affixe du vecteur $\vec{V} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $z_{\vec{V}} = x + iy$.
- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $z_{\vec{U} + \vec{V}} = z_{\vec{U}} + z_{\vec{V}}$; $z_{k\vec{U}} = k \cdot z_{\vec{U}}$

- Si M est d'affixe z alors $|z_M| = OM$ et $\arg z_M = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ ($z \neq 0$).



- Si A et B sont deux points distincts d'affixes z_A et z_B : la distance AB est égale à $|z_B - z_A|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$.



- Pour déterminer la nature d'un triangle ABC , il suffit de calculer ses côtés avec $AB = |z_B - z_A|, \dots$
- Pour montrer que deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} sont colinéaires, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\vec{V}} = k \cdot z_{\vec{U}}$.
- Pour montrer que trois points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\vec{AC}} = k \cdot z_{\vec{AB}}$.
- Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\vec{CD}} = k \cdot z_{\vec{AB}}$.

- L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = r$ ($r > 0$) est le cercle de centre A et de rayon r (car $|z - z_A| = r \Leftrightarrow AM = r$).
- L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ ($z_A \neq z_B$) est la médiatrice du segment $[AB]$ (car $|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$).

► *Exemple* : Soit A et B les points d'affixe $z_A = 2 + 2i$ et $z_B = 4i$.

La distance OA est égale à $|z_A| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

La distance OB est égale à $|z_B| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$.

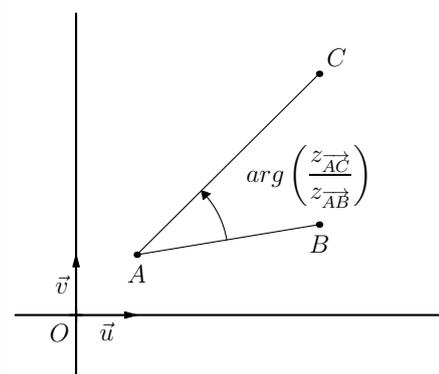
La distance AB est égale à $|z_B - z_A| = |4i - (2 + 2i)| = |-2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

On en déduit que le triangle OAB est rectangle et isocèle en A car $AO = AB$ et $AO^2 + AB^2 = OB^2$.

Si on veut une mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{OA}) , il suffit de déterminer un argument de z_A :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{OA}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

L'angle entre les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} est tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \arg \left(\frac{z_{\vec{AC}}}{z_{\vec{AB}}} \right)$ (avec $A \neq B$ et $A \neq C$)



9) Probabilités

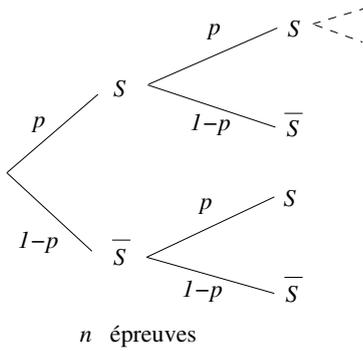
a) Loi binomiale

- On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
- On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

► *Exemple* : Lancer un dé avec pour issues contraires « obtenir un 6 » et « ne pas obtenir un 6 » est une *épreuve* de Bernoulli. Lancer le dé 10 fois est un *schéma* de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli) .

► Remarques :

- Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour « succès ») et \bar{S} . La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de \bar{S} est alors $(1 - p)$).
- Pour s'assurer que l'on a bien affaire à un *schéma* de Bernoulli, il faut vérifier que chaque expérience prise isolément n'admet que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre), que le « succès » a toujours la même probabilité d'apparaître et qu'il y a bien indépendance entre chacune des *épreuves* de Bernoulli successives.



Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.

Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S , la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n, p)$.

• **Probabilité d'obtenir k succès** ($0 \leq k \leq n$) :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(Le coefficient $\binom{n}{k}$ s'obtient avec la calculatrice : $n \text{ nCr } k$)

• **Espérance de X** : $E(X) = np$

• **Variance de X** : $V(X) = np(1-p)$

• **Écart-type de X** : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

► **Exemple :**

Si on lance 7 fois de suite un dé et si on note X le nombre de 6 obtenus, on répète 7 fois l'épreuve de Bernoulli : « obtenir un 6 (probabilité : $\frac{1}{6}$) - ne pas obtenir un 6 ».

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = \frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir exactement trois fois un « 6 » est égale à : $\binom{7}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

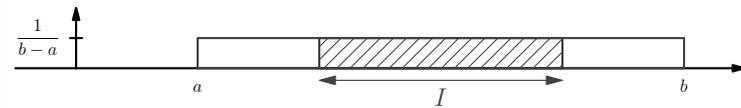
La probabilité de n'obtenir que des « 6 » est égale à : $\left(\frac{1}{6}\right)^7$

La probabilité de n'obtenir aucun « 6 » est égale à : $\left(\frac{5}{6}\right)^7$

L'espérance de X (nombre moyen de « 6 » que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est égale à $np = \frac{7}{6}$.

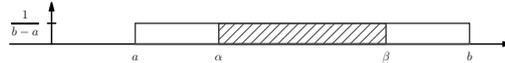
b) Loi uniforme

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a; b]$ lorsque pour tout intervalle I , inclus dans $[a; b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\frac{1}{b-a}$.



• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a; b]$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[a; b]$, on a :

$$p(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$



$$p(X \leq \alpha) = p(a \leq X \leq \alpha) = \frac{\alpha - a}{b - a}$$



$$p(X \geq \beta) = p(\beta \leq X \leq b) = \frac{b - \beta}{b - a}$$



$$p(X = \alpha) = 0$$

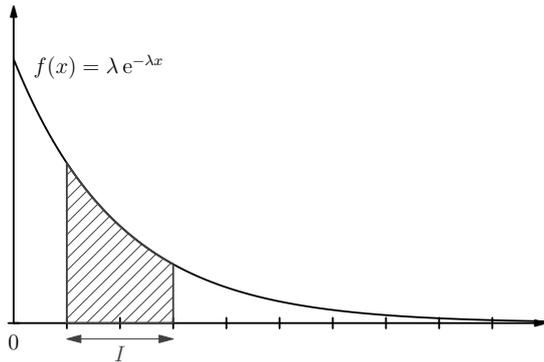


(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a; b]$ alors l'**espérance** de X est égale à $\frac{a+b}{2}$.

c) Loi exponentielle

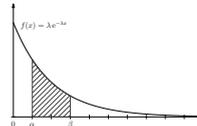
On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0; +\infty[$ lorsque pour tout intervalle I , inclus dans $[0; +\infty[$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$



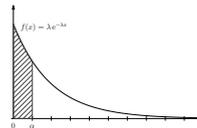
On a donc $p(X \in I) = \int_{x \in I} \lambda e^{-\lambda x} dx$.

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0; +\infty[$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[0; +\infty[$, on a :

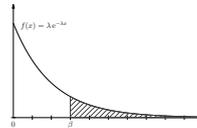
$$p(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_{\alpha}^{\beta}$$



$$p(X \leq \alpha) = p(0 \leq X \leq \alpha) = \int_0^{\alpha} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{\alpha}$$



$$p(X \geq \beta) = 1 - p(0 \leq X \leq \beta) = 1 - \int_0^{\beta} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^{\beta}$$



(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0; +\infty[$ alors **l'espérance** de X est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

► **Exemple :** La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0006$ sur $[0, +\infty[$.

La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie inférieure à 1000 heures est donnée par :

$$p(X < 1000) = \int_0^{1000} 0,0006 e^{-0,0006x} dx = [-e^{-0,0006x}]_0^{1000} = 1 - e^{-0,6}$$

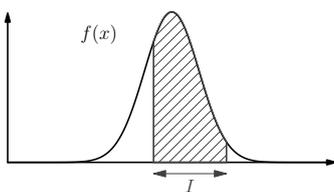
La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 500 heures est donnée par :

$$p(X > 500) = 1 - \int_0^{500} 0,0006 e^{-0,0006x} dx = 1 - [-e^{-0,0006x}]_0^{500} = e^{-0,3}$$

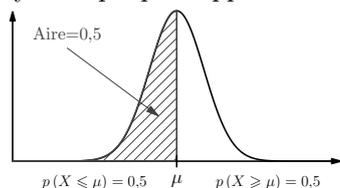
d) Loi normale

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ et **d'écart-type** σ lorsque pour tout intervalle I la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la

fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.



► **Remarque** : L'aire totale sous la courbe est égale à 1 (on dit que f est une densité de probabilité) et la courbe est symétrique par rapport à l'espérance μ . On a donc la situation suivante :



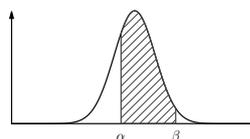
• Si une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ** alors pour tous réels α et β , on a :

$$p(\alpha \leq X \leq \beta) =$$

TI : DISTR (2nd+VARS) ; `normalcdf` ($\alpha, \beta, \mu, \sigma$)

CASIO : Menu STAT ; DIST ; NORM ; NCD avec

Lower : α ; Upper : β ; σ : σ ; μ : μ

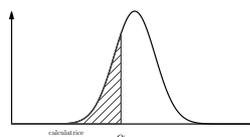


$$p(X \leq \alpha) =$$

TI : `normalcdf` ($-10^{99}, \alpha, \mu, \sigma$)

CASIO : NCD avec

Lower : -10^{99} ; Upper : α ; σ : σ ; μ : μ



$$p(X \geq \beta) =$$

TI : `normalcdf` ($\beta, 10^{99}, \mu, \sigma$)

CASIO : NCD avec

Lower : β ; Upper : 10^{99} ; σ : σ ; μ : μ



• **Valeurs remarquables :**

$$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,68$$

$$p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,95$$

$$p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,997$$

► **Exemple 1:** (pour tester sa calculatrice)

Si X suit la loi normale d'espérance $\mu = 58$ et d'écart-type $\sigma = 6$, on doit avoir :

$$p(52 \leq X \leq 64) \approx 0,682689 \quad ; \quad p(X \leq 55) \approx 0,308538 \quad ; \quad p(X \geq 62) \approx 0,252493$$

► **Exemple 2:** Le diamètre X des barres métalliques sortant d'un atelier suit la loi normale d'espérance 12 mm (le diamètre attendu) et d'écart-type 0,08 mm. Un client refuse d'acheter des tubes dont le diamètre ne serait pas compris entre 11,9 mm et 12,2 mm. On cherche à déterminer le pourcentage de tubes acceptés par le client.

$$p(11,9 \leq X \leq 12,2) \approx 0,888, \text{ donc } 88,8\% \text{ des tubes sont acceptés par le client.}$$

► **Exemple 3:** Une variable aléatoire suivant une loi normale est telle que $p(X < 2) = 0,067$ et $p(X < 3) = 0,159$.

On peut en déduire que $p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) = 0,933$ et $p(2 < X < 3) = p(X < 3) - p(X < 2) = 0,092$.

10) Échantillonnage

a) Intervalle de fluctuation à 95%

Étant donné une population dans laquelle la proportion connue d'un certain caractère est p . Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population alors il y a 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion f du caractère au sein de cet échantillon appartienne à l'intervalle :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation à 95%** de l'échantillon associé à la proportion p .

b) Prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation

Étant donné une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un certain caractère est p . Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population et si la fréquence réelle observée f du caractère dans cet échantillon est comprise dans l'intervalle de fluctuation alors on dit qu'on accepte au seuil de 95% l'hypothèse que la proportion réelle du caractère dans la population est bien p (dans le cas contraire, on dit qu'on rejette l'hypothèse).

► *Exemple* : Un candidat pense que 52% des électeurs lui sont favorables. On prélève avec remise un échantillon de 500 électeurs : 47% des électeurs interrogés de cet échantillon se déclarent favorable au candidat en question.

L'intervalle de fluctuation de l'échantillon associé à la proportion de 52% est $[0,476 ; 0,564]$ car :

$$0,52 - 1,96\sqrt{\frac{0,52 \times 0,48}{500}} \approx 0,476 \text{ et } 0,52 + 1,96\sqrt{\frac{0,52 \times 0,48}{500}} \approx 0,564.$$

0,47 étant en dehors de l'intervalle de fluctuation, on peut rejeter au seuil de 95% l'hypothèse du candidat selon laquelle 52% des électeurs lui sont favorables.

c) Estimation par un intervalle de confiance

On cherche à connaître une estimation de la proportion p inconnue d'un certain caractère au sein d'une population. Pour cela, on prélève avec remise un échantillon de taille n au sein de la population et on note f la proportion observée du caractère au sein de l'échantillon. Il y a alors 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion p du caractère au sein de la population totale soit comprise dans l'intervalle :

$$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance à 95%** associé à la proportion f .

► *Exemple* : Un sondage réalisé sur un échantillon de 1000 personnes attribue à un candidat un score de 18%. L'intervalle de confiance à 95% associé à cette proportion observée de 18% dans l'échantillon est $[15,6\% ; 20,3\%]$ car :

$$0,18 - 1,96\sqrt{\frac{0,18 \times 0,82}{1000}} \approx 0,156 \text{ et } 0,18 + 1,96\sqrt{\frac{0,18 \times 0,82}{1000}} \approx 0,203.$$