Lois de probabilités continues

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Mathématicien, astronome et physicien allemand. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Son nom reste associé aujourd'hui à la célèbre courbe en cloche représentant la densité de probabilité d'une variable aléatoire normale réduite.

I. Loi uniforme sur $[a, b]$

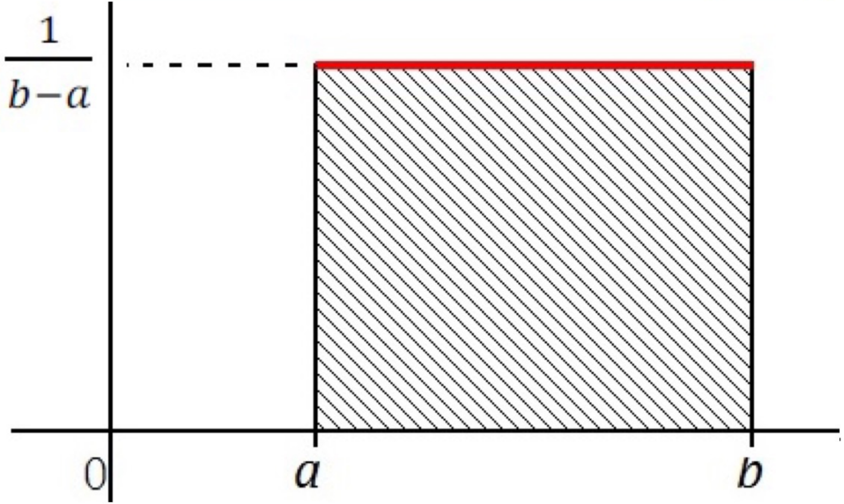
Définition et propriété

Soit a et b deux réels tels que $a < b$

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$** lorsque sa densité de probabilité est la fonction constante égale à $f(x) = \frac{1}{b-a}$ sur $[a, b]$.

On note que

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$



Propriété :

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, sa densité est $f(x) = \frac{1}{b-a}$ pour $x \in [a,b]$

alors X admet une espérance qui vaut

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

et X admet une variance et un écart type qui valent

$$\boldsymbol{Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}}$$

Exemple 1 :

Thomas a dit qu'il passerait voir Anita à un moment quelconque entre 18h30 et 21h00.

Quelle est la probabilité qu'il arrive pendant son feuilleton préféré qui dure de 19h à 19h30 ?

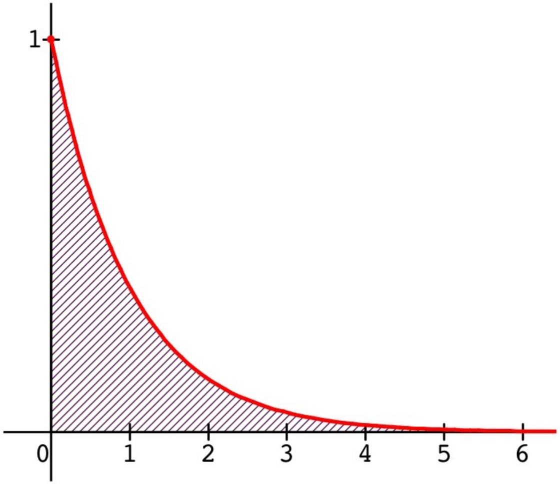
II. Loi exponentielle

Définition et propriété :

Soit $\lambda > 0$ un réel

T une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$ sur $[0;+\infty[$ lorsque sa densité de probabilité est la fonction

$$\forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0};+\infty[,\quad \boldsymbol{f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}}$$



T admet une espérance

$$\boldsymbol{E(T) = \frac{1}{\lambda}}$$

Exemple 2 :

La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est modélisée par la loi exponentielle d'espérance 2000.

Quelle est la probabilité que l'un des composant pris au hasard, soit encore en état de marche au bout de 500 h ?

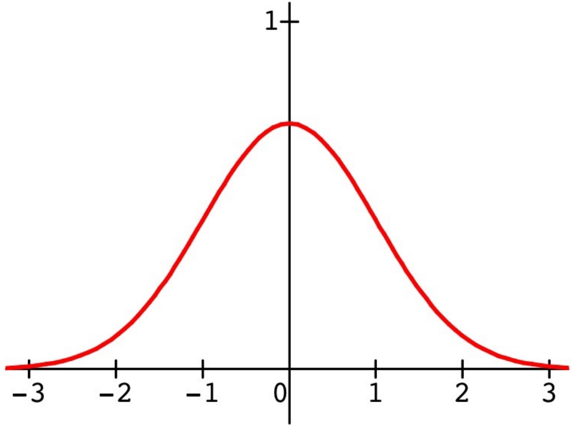
III. Loi normale

Définition :

Une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance $\boldsymbol{\mu}$** et **d'écart-type $\boldsymbol{\sigma}$** notée $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ lorsque la fonction de densité est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

On dit que la courbe représentant f est une courbe « en cloche ».



Exemple 3 :

Le cahier des charges de l’usinage d’une tige prévoit pour sa lon-longueur, en cm, l’intervalle de tolérance [4,40 ; 4,80].
Le service qualité constate qu’un premier lot de tiges fabriquées correspond à une distribution normale de moyenne 4,52 cm et d’écart –type 0,21 cm.

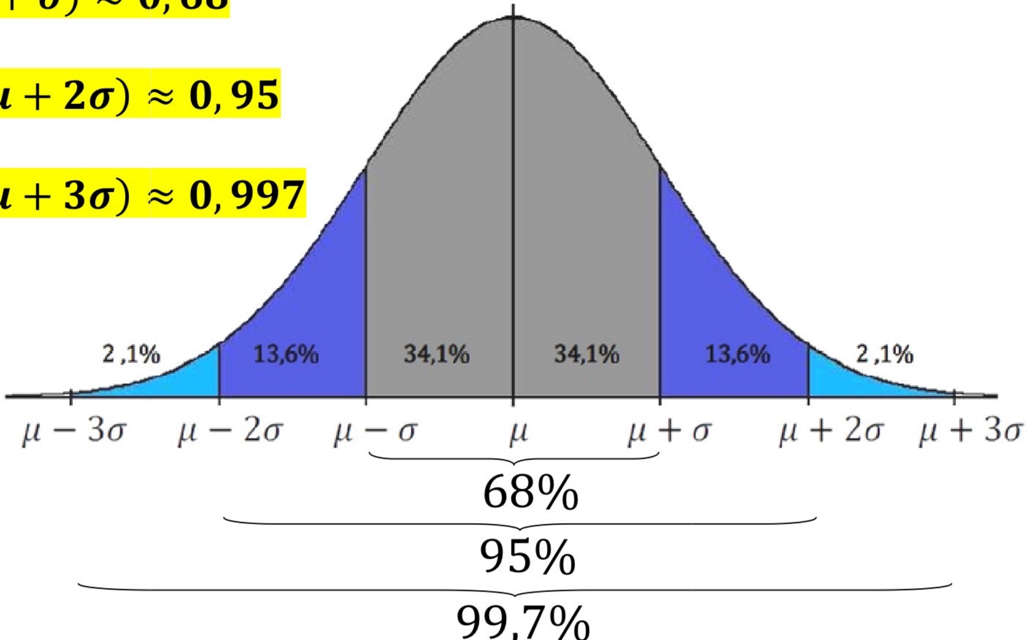
Quelle est la probabilité qu’une pièce prise au hasard dans ce lot, soit acceptable ?

Remarque : Lorsque X suit une loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

$\boldsymbol{P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68}$

$\boldsymbol{P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95}$

$\boldsymbol{P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997}$



Approximation d'une binomiale :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathrm{B}(n; p)$ alors son espérance vaut $E(X) = np$ et son écart-type $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Si n est « très grand » et si p n'est « ni trop voisin de 0, ni trop voisin de 1 » alors on peut approcher la loi binomiale $\mathrm{B}(n; p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ avec :

$$\mu = np \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

IV. Intervalle de fluctuation

Propriété : $p \in \,]0;1[$

Quand on prélève un échantillon de taille n dans une population qui contient une proportion p du caractère étudié, alors la proportion f du caractère dans l'échantillon appartient à l'**intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%**

$$\left[\boldsymbol{p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,,\, p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}\right].$$

Remarque : Dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, cet intervalle est très proche de celui utilisé en classe de 1^{re}.

Exemple 4 :

Dans une serre où sont élevées des drosophiles, le pourcentage de mouches avec le type « yeux rouges » est censé être de 80%, s'il n'y a pas de facteurs extérieurs qui engendrent des mutations. On prélève un échantillon de 1000 mouches et on observe que 76% des mouches sont du type « yeux rouges ».

Peut-on détecter la présence de facteurs extérieurs ?

V. Estimation

Lorsque l'on cherche une information sur une population d'effectif important à partie de l'étude d'un échantillon.

Propriété :

Lorsque n est assez grand, l'intervalle

$$\left[f - 1,96\,\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\,, f + 1,96\,\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$$

où f est une fréquence obtenue sur un échantillon de taille n, est un **intervalle de confiance au niveau de confiance 95%** pour la proportion correspondante p dans la population.

Exemple 5 :

Un fournisseur d'accès Internet propose des abonnements comportant la fourniture d'un modem ADSL. Selon un enquête menée par une association de consommateurs et réalisée auprès de 428 clients, 86 déclarent avoir reçu un modem défectueux.

Déterminer l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 0,95 de la proportion de modems défectueux.