Géométrie dans l'espace

L'étude des objets de l'espace déjà abordée dans les classes antérieures se poursuit en terminale : on apprend à caractériser droites et plans par des relations vectorielles, à déterminer une équation cartésienne d'un plan, à définir une représentation paramétrique d'une droite. On étudie la position relative de droites et de plans de l'espace et on étend le produit scalaire à l'espace.
L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Quelles sont les deux manières de caractériser une droite ?

Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace contenant un point A de coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(a\,;b\,;c)$. On peut caractériser cette droite de deux manières.

Caractérisation vectorielle :

$M \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Caractérisation par un système d'équations paramétriques (représentation paramétrique) :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Quelles sont les deux manières de caractériser un plan ?

Soit $\mathscr{P}$ un plan de repère $(A\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ et $\vec{n}$, de coordonnées $(a\,;b\,;c)$, un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. On peut caractériser ce plan de deux manières.

Caractérisation vectorielle :

$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v}$ avec $k \in \mathbb{R}$ et $k' \in \mathbb{R}$.

Caractérisation par une équation cartésienne :

le plan $\mathscr{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Comment caractériser un segment ?

Caractérisation vectorielle :

$M \in [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k \in [0\,;1]$.

Comment étudier la position relative de deux droites de l'espace ?

On souhaite étudier la position relative de deux droites de l'espace : la droite $\mathscr{D}$ passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$, et la droite $\mathscr{D}'$ passant par A', de vecteur directeur $\vec{u}'$. Pour cela, il suffit d'étudier leurs **vecteurs directeurs**.

Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont **colinéaires**, alors les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.

Deux cas sont alors possibles :

- si A appartient à $\mathscr{D}'$, alors les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont confondues ;
- si A n'appartient pas à $\mathscr{D}'$, alors les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont strictement parallèles, leur intersection est vide.

Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ **ne sont pas colinéaires**, alors les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont soit sécantes (leur intersection est un point), soit non coplanaires (leur intersection est vide).

Comment étudier la position relative d'une droite et d'un plan ?

On souhaite étudier la position relative d'une droite $\mathscr{D}$ passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$ et d'un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$. On s'intéresse alors aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ **sont orthogonaux**, alors la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Si, en outre, le point A appartient au plan $\mathscr{P}$, alors la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Sinon, la droite $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$ et leur intersection est vide.

Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ **ne sont pas orthogonaux**, alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants ; leur intersection est un point. Si, par ailleurs, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont **colinéaires**, alors la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

MOTS CLÉS

VECTEUR DIRECTEUR

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si $\vec{u}$ est **non nul** et si la droite $\mathscr{D}$ est **parallèle** à la **droite** (AB).

REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE

L'espace est rapporté au repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$. Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace, $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathscr{D}$ et $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. La droite $\mathscr{D}$ est caractérisée par le système :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

VECTEUR NORMAL

On appelle vecteur normal à un plan $\mathscr{P}$, tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathscr{P}$.

Équation cartésienne d'un plan

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, un plan admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

VECTEURS COLINÉAIRES

$\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u} \neq \vec{0}$ quand il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

DROITES COPLANAIRES

Deux droites sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan. Deux droites distinctes coplanaires sont soit sécantes, soit strictement parallèles.

VECTEURS ORTHOGONAUX

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

PARALLÉLISME DANS L'ESPACE

- Deux droites de l'espace sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Une droite est parallèle à un plan de l'espace si ses vecteurs directeurs sont orthogonaux aux vecteurs normaux du plan.
- Deux plans sont parallèles si les vecteurs normaux de l'un sont colinéaires aux vecteurs normaux de l'autre.

Comment étudier les positions relatives de deux plans ?

On considère deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

Point de vue géométrique : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont **parallèles** si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont **colinéaires**. Deux cas sont alors possibles : soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus et leur intersection est un plan ; soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles et leur intersection est vide.

Sinon $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont **sécants** et leur intersection est une droite.

Point de vue algébrique : soient $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ les équations cartésiennes respectives des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Pour étudier l'intersection de ces deux plans, on résout le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Soit ce système n'a pas de solutions, soit il en a une infinité.

Ainsi, une **droite de l'espace** peut être représentée par un **système de deux équations linéaires**, composé des équations cartésiennes de deux plans sécants selon cette droite (on remarque que ce système n'est pas unique).

Quelles sont les différentes manières de calculer un produit scalaire ?

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right].$$

Si α est une mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, on a aussi : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$.

Dans un repère orthonormal, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Quand on calcule un produit scalaire en géométrie non analytique, on utilise la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs et se ramener ainsi à des calculs de produits scalaires sur des vecteurs orthogonaux ou colinéaires.

Quels sont les cas particuliers à connaître et leurs utilisations ?

Si l'un des deux vecteurs est nul, leur produit scalaire est nul.

Deux **vecteurs** de l'espace sont **orthogonaux** si et seulement si **leur produit scalaire** est **nul**.

Si deux vecteurs non nuls de l'espace sont colinéaires, alors $\|\vec{u}\cdot\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Pour démontrer que deux droites de l'espace $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont orthogonales, on montre que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

La sphère de diamètre [AB] est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

Quelles sont les propriétés du produit scalaire ?

Pour effectuer des **calculs vectoriels** avec des produits scalaires, on utilise les propriétés suivantes :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$; $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.
- Pour tout réel k, $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.
- Le carré scalaire de $\vec{u}$ est : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Icosaèdre en trois dimensions vu de face.

MOTS CLÉS

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

• Soit une droite $\mathcal{D}$ coupant un plan $\mathcal{P}$ en un point I, on dit que la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont orthogonaux si $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à deux droites de $\mathcal{P}$ passant par I.

• Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (non nécessairement coplanaires) sont orthogonales si les parallèles à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ passant par un point M quelconque sont perpendiculaires.

• Deux plans sont orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

REPÈRE ORTHONORMAL

Un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ de l'espace est dit orthonormal lorsque les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, $\vec{i}$ et $\vec{k}$, et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux et ont la même norme.

PRODUIT SCALAIRE

• Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$

Si α est une mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha$.

• Dans un repère orthonormal, si $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

RELATION DE CHASLES

Quels que soient les points A, B et C de l'espace : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

CARRÉ SCALAIRE

Le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$ est le nombre réel $\|\vec{u}\|^2$, noté $\vec{u}^2$. Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ si $\vec{u}(x\,;y\,;z)$, $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

NORME

La norme d'un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est le nombre réel positif noté $\|\vec{u}\|$ tel que $\|\vec{u}\| = AB$.

PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE RÉEL

Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un réel.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur $k\vec{u}$ tel que :

• $k\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$;

• $k\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$;

• $k\vec{u}$ est de sens opposé à $\vec{u}$ si $k < 0$;

• la longueur de $k\vec{u}$ est celle de $\vec{u}$ multipliée par $|k|$ (valeur absolue de k).

Amérique du Nord (mai 2013)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; − 1 ; − 2) et D (7 ; − 1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$.

a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

b) Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$,

a pour r on paramétrique $\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

c) La drc lan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

La bonne méthode

1. Vérifier que deux vecteurs, judicieusement choisis, sont non colinéaires.

2. *a)* Montrer qu'un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

b) Un vecteur directeur de la droite est donc un vecteur normal du plan.

c) Vous connaissez les coordonnées d'un point de la droite et de l'un de ses vecteurs directeurs.

d) Les coordonnées (x ; y ; z) du point d'intersection H de Δ et (ABC) vérifient simultanément leurs deux équations.

3. *a)* Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires. Deux plans sécants étant deux plans non parallèles, que peut-on en déduire quant à leurs vecteurs normaux ?

b) Vérifier que les points de cette droite appartiennent aux deux plans.

c) Comparer un vecteur directeur de d et un vecteur normal de (ABC).

Mét e (sept. 2010)

L'espa porté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.
Soit $\mathcal{P}$ l quation $3x + y - z - 1 = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$ où t désigne un nombre réel.

1. *a)* Le point C(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan $\mathcal{P}$? Justifier.

b) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

2. Soit Q le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q.

b) Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan Q et de la droite $\mathcal{D}$.

c) Montrer que $CI = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(-t + 1 ; 2t ; -t + 2)$.

a) Vérifier que, pour tout nombre réel t, $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

b) Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

La bonne méthode

1. *a)* Montrer que les coordonnées du point C vérifient l'équation du plan.

b) Montrer qu'un point de $\mathcal{D}$ appartient toujours à $\mathcal{P}$.

2. *a)* Déterminer un vecteur normal à $\mathcal{P}$. On a $C \in Q$.

b) Le point I vérifie les équations de $\mathcal{D}$ et de Q.

c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CI}$.

3. *a)* Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CM_t}$. On a $CM_t^2 = \overrightarrow{CM_t} \cdot \overrightarrow{CM_t}$.

b) Étudier la fonction $t \mapsto CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.