Dérivation

Le concept de dérivée est apparu il y a environ trois siècles. Il est lié, en mathématiques, à la notion de tangente à une courbe, et en sciences physiques à celle de vitesse instantanée d'un mobile.

Qu'est ce qu'une fonction dérivable en un point ?

Une fonction f est dérivable en un réel a de son ensemble de définition si le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie quand x tend vers a. Dans ce cas, ce réel est appelé « le nombre dérivé de f en a » et est noté $f'(a)$.

On a $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout réel a appartenant à I. On appelle « fonction dérivée de f » la fonction qui, à tout réel x appartenant à I, associe le réel $f'(x)$.

Que faut-il retenir de la classe de Première ?

fonction f	fonction f'	Conditions
$x \mapsto ax + b$, a et b réels	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$u + v$	$u' + v'$	
ku, k réel	ku'	
$u \times v$	$u'v + uv'$	
u^n	$n\,u'u^{n-1}$	si $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, $u \neq 0$ sur I.
$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I.
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I.
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto a \times u'(ax+b)$	Si $x \in$ I, u est dérivable en $y = ax + b$

Les nouvelles fonctions étudiées en classe de Terminale

La dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto e^x$.

Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I, $(e^u)' = u'\,e^u$ sur I.

Pour tout réel $x > 0$, on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et pour toute fonction u dérivable strictement positive sur un intervalle I, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Pour tout réel x, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\cos'(ax + b) = -a\sin(ax + b)$.

Pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\sin'(ax + b) = a\cos(ax + b)$.

Équation de la tangente à une courbe en un point où la fonction est dérivable

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors le nombre dérivé de f en a appartenant à I, noté $f'(a)$, est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f de f au point d'abscisse a. Une équation de T est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On note f' sa dérivée sur I :

- si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I ;
- si $f' > 0$ (respectivement $f' < 0$) sur I alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I.
- si une fonction f admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$.

MOTS CLÉS

FONCTION DÉRIVABLE EN UN SEUL POINT

• Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
La **fonction** f est **dérivable** en a si et seulement s'il existe un réel m tel que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m.$$

• Le nombre réel m s'appelle le **nombre dérivé** de f en a et on le note $f'(a) = m$.

FONCTION DÉRIVÉE

• Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I.

• Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction qui, à tout réel $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x, est appelée fonction dérivée de f. Elle est notée f'.

DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

• Sa fonction dérivée f' s'appelle dérivée première ou dérivée du premier ordre de f.

• Lorsque la fonction f' est dérivable sur I, sa dérivée, notée f'' ou $f^{(2)}$, est appelée dérivée seconde de la fonction f.

• On peut ainsi définir, pour tout naturel n tel que $n > 1$, la dérivée n-ième (ou dérivée d'ordre n) de la fonction f, comme étant la dérivée de la dérivée d'ordre $(n - 1)$ de f.

TANGENTE À UNE COURBE

• La tangente à une courbe $\mathscr{C}$ en un point A est la position limite, quand elle existe, de la sécante (AM) lorsque le point M de la courbe tend vers le point A.

• Si une fonction f est dérivable en a, alors sa courbe représentative admet, au point A d'abscisse a, une tangente passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

• Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse a (et d'ordonnée $f(a)$) est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Sujet inédit

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte.

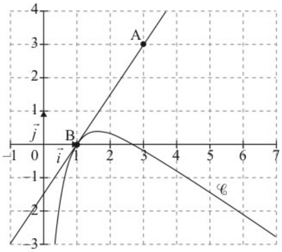
1. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est :

a) $y = x + 1$ ***b)*** $y = ex$ ***c)*** $y = e^x$

2. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$. Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation :

a) $y = x + 2$ ***b)*** $y = -x + 4$ ***c)*** $y = 3x + 1$ ***d)*** $y = x + 3$

3. La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-après est la représentation graphique d'une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. La droite (AB), tracée sur le graphique, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 1.



On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a) $h'(1) = 0$ **b)** $h'(1) = 1{,}5$ **c)** $h'(1) = -\dfrac{2}{3}$

4. Soit f une fonction définie sur $]-\infty\,;\ 0[\ \cdot\ ]0\,;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$. On admet que la fonction f' est dérivable sur $]-\infty\,;\ 0[\cdot]0\,;+\infty[$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Le tableau de variations de la fonction f est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2\ln 2 + 3$	↗	$+\infty$

La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\ln(1{,}5)$ admet un coefficient directeur :

a) strictement positif ***b)*** strictement négatif ***c)*** nul

5. La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels R par $f(x) = e^{-2x+1}$.

On note f' sa fonction dérivée.

a) Pour tout x de R, $f'(x) = e^{-2}$.

b) Pour tout x de R, $f'(x) = e^{-2x+1}$.

c) Pour tout x de R, $f'(x) = -2e^{-2x+1}$.

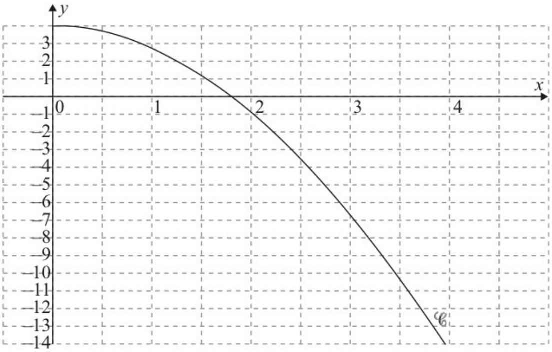
6. On donne la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$. La dérivée de f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

a) $f'(x) = 1$ ***b)*** $f'(x) = \ln x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ***d)*** $f'(x) = \ln(x) + 1$

7. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;4]$ par $f(x) = -x^2 - x + 4 + \ln(x+1)$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal ci-dessous et f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;4]$.



a) Calculer $f'(x)$.

b) Justifier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;4]$.

La bonne méthode

1. et **2.** Une équation de la tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en a (f dérivable en a) est $f'(a)$.

4. Il faut penser à utiliser le tableau de variations.

5. La fonction f est de la forme e^u.

6. La fonction f est de la forme $u \times v$.

7. ***a)*** On a $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

b) Montrer que $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[0\,;4]$.