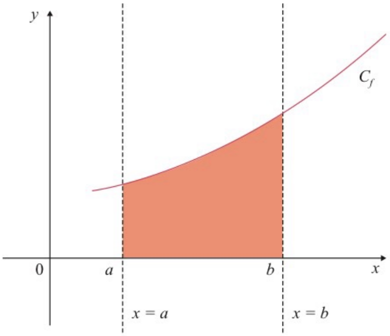
Intégration

Pour calculer l'aire de la surface comprise entre une courbe et l'axe des abscisses, on peut approcher cette surface par une série de bandes rectangulaires de largeur infinitésimale. L'intégrale de la fonction représentée par cette courbe est, au signe près, égale à la somme de leurs aires.
L'intégration est donc un outil précieux pour calculer l'aire de surfaces délimitées par des courbes dont on connaît les équations (mais aussi de volumes dont on connaît les éléments du solide). Cette branche des mathématiques a de nombreuses utilisations en physique et en économie.

Qu'est-ce qu'une intégrale ?

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit C_f sa courbe représentative. L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire du domaine situé entre C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ en unités d'aire. On la note $\int_a^b f(x)\,dx$.



Dans un repère orthogonal $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$, on considère le point K de coordonnées (1 ; 1).
Une unité d'aire représente l'aire du rectangle OIKJ.

Qu'est-ce qu'une primitive ?

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I lorsque F est dérivable sur I et que sa dérivée est égale à f sur cet intervalle.
Lorsqu'une fonction admet une primitive, on peut en trouver une infinité. En effet, si on ajoute n'importe quel nombre réel à la primitive trouvée, les dérivées des primitives ainsi obtenues donneront la même fonction, car la « dérivée d'un nombre réel est nulle ».
Exemple : $F(x) = x^2$; $G(x) = x^2 + 15$; $K(x) = x^2 - 1$ … $K(x) = x^2 + k$ avec k appartenant à l'ensemble des réels.
Toutes ces fonctions sont dérivables sur l'ensemble des réels.
Si on dérive toutes ces fonctions, on obtient une seule fonction définie par $f(x) = 2x$.

Comment calculer une primitive, une intégrale ?

Une primitive, lorsqu'elle existe, est une fonction.
Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et c est un nombre réel, alors cF est une primitive de cf sur I.
Exemple : la fonction définie par $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive sur l'ensemble des nombres réels de la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et la

MOTS CLÉS

FONCTION CONTINUE

• Une fonction f, définie sur un intervalle ouvert contenant un réel a, est continue en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
• Une fonction f, définie sur un intervalle I ouvert, est continue sur I lorsque f est continue en tout réel a, appartenant à I.
• Une fonction f, définie sur un intervalle $[a\,;b]$, est « continue sur $[a\,;b]$ » lorsque :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur }]a\,;b[\\ \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \\ \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$$

INTÉGRALE

Pour f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I, $\int_a^b f(x)dx$ est le réel $F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur I.

AIRE SOUS UNE COURBE

Lorsqu'une fonction f est continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ correspond à « l'aire sous la courbe » : elle est égale à l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et la courbe représentative de f, exprimée en unités d'aire.

UNITÉ D'AIRE (U.A.)

Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, une unité d'aire est l'aire du rectangle formé avec les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

PRIMITIVE

On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée sur I est la fonction f.

FONCTION DÉRIVÉE

• Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I.
• Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction qui, à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x, est appelée fonction dérivée de f. Elle est notée f'.

fonction définie par $G(x) = 3x$ est une primitive de la fonction définie par $g(x) = 3$ sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de la fonction $f + g$ sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $F + G$ définie par $F(x) + G(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3x$ sur $\mathbb{R}$.

Les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent, par « lecture inverse », le tableau des primitives suivant où c est une constante.

$f(x)$	$F(x)$	D_f
k avec $k \in \mathbb{R}$	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \neq 1$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$ avec $n \neq 1$	$-\dfrac{1}{n-1}\,\dfrac{1}{x^{n-1}} + c$	$]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x + c$	$]0\,;+\infty[$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$

Une intégrale, lorsqu'elle existe, est une valeur réelle.

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a\,;b]$, alors elle admet une primitive F telle que $F'(x) = f(x)$.

On a alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple : $\displaystyle\int_1^2 2x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$.

Comment calcule-t-on la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle ?

La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;b]$ est égale au réel $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $(a\,, b, c) \in \mathrm{I}^3$.

On a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, $(a\,, b) \in \mathrm{I}^2$ et $k \in \mathbb{R}$.

On a : $\displaystyle\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

Positivité de l'intégrale

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $(a\,, b) \in \mathrm{I}^2$.

Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a\,;b]$ on a : $f(x) > 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

En corollaire : si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a\,;b]$, on a $f(x) > g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Intégration par parties*

Le choix de la technique d'intégration par parties se rencontre souvent (mais pas nécessairement) lorsque la fonction à intégrer se présente sous la forme d'un produit.

Soient u et v deux fonctions dérivables, de dérivées u' et v' sur l'intervalle $[a\,;b]$.

On a $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b$, car une primitive de la fonction $(uv)'$ est la fonction uv.

Mais aussi $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ en calculant la dérivée de la fonction $(uv)'$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale.

D'où $\displaystyle\left[u(x)v(x)\right]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$, puis : $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$. (Théorème de l'intégration par parties)

Exemple : la primitive de la fonction logarithme qui s'annule en 1 est la fonction F (de variable t), définie sur $]0\,;+\infty[$, par $\displaystyle F(t) = \int_1^t \ln(x)\mathrm{d}x$.

On procède alors au calcul de cette intégrale avec la formule de l'intégration par parties, en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$, soit $u(x) = x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$: $\displaystyle F(t) = \int_1^t 1 \times \ln(x)\mathrm{d}x = \left[x\ln x\right]_1^t - \int_1^t x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[x\ln x\right]_1^t - \int_1^t 1\,\mathrm{d}x$

$= t\ln t - \ln 1 - \left[x\right]_1^t = t\ln t - t + 1$.

Ainsi, les fonctions de la forme $t \mapsto t\ln t - t + k$, $k \in \mathbb{R}$ sont les primitives de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$.

* Non exigible au baccalauréat mais important à connaître.

MOTS CLÉS

LINÉARITÉ DE L'INTÉGRALE

• Soient α et β deux nombres réels et f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$: $\displaystyle\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

• Cette propriété est utilisée pour simplifier les écritures des intégrales.

RELATION DE CHASLES

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels appartenant à I, alors :

$\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

VALEUR MOYENNE

Soient a et b deux réels distincts et f une fonction continue sur $[a\,;b]$.

La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ est égale au réel $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

INÉGALITÉ DE LA MOYENNE

• Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, telle que pour tout x de $[a\,;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$\displaystyle m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M\,(b-a)$.

• L'inégalité de la moyenne fournit un encadrement de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ dans le cas où la fonction considérée est bornée sur l'intervalle $[a\,;b]$.

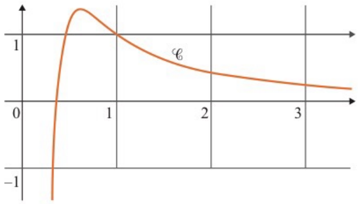
INTÉGRATION PAR PARTIES

• Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;\,b]$ telles que les fonctions u' et v' soient continues sur $[a\,;\,b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.

• Si l'on choisit judicieusement les fonctions u et v, le théorème d'intégration par parties permet de remplacer un calcul d'intégrale par le calcul d'une autre intégrale plus simple. Il permet aussi d'établir des relations de récurrence entre les termes d'une suite d'intégrales.

Amérique du Nord (mai 2013)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x^2}$ et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. a) Étudier la limite de f en 0.

b) Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1 - 2\ln x}{x^3}$.

b) Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln x > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = n$.

a) Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant e - \dfrac{1}{2}$.

On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-2 - \ln x}{x}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle.

b) Calculer I_n en fonction de n.

c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

La bonne méthode

1. a) Utiliser la limite de la fonction logarithme népérien en 0^+.

b) Utiliser les propriétés des limites, en particulier les sommes et produits de limites.

c) Interpréter graphiquement chacune des deux limites.

2. a) Utiliser la formule de la dérivée d'un quotient.

b) Montrer que le signe de f' est celui de $-1 - 2\ln x$, puis résoudre l'inéquation demandée. Conclure.

c) En dressant le tableau de variation, ne pas oublier de placer les bornes et les limites.

3. a) Un point appartient à l'intersection de deux ensembles si et seulement si ses coordonnées vérifient simultanément les équations de ces deux ensembles.

b) Utiliser le tableau de variation précédent et le point d'intersection trouvé.

4. a) Interpréter l'aire à l'aide d'une intégrale et utiliser la primitive donnée dans l'énoncé.

b) Utiliser la primitive donnée dans l'énoncé.

c) Utiliser les limites usuelles des fonctions $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ quand x tend vers $+\infty$.

Liban (juin 2010)

On considère la suite u_n définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}\,dx$.

1. a) Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b) Calculer u_1. En déduire u_0.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

3. a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :
$u_{n+1} + u_n = \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant \dfrac{1 - e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

La bonne méthode

1. a) Utiliser la définition de la suite puis la linéarité de l'intégrale.

b) Remarquer que, pour une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où u est une fonction à valeur strictement positive, une primitive est la fonction $\ln(u)$.

2. Déterminer le signe de la fonction intégrée dans la définition de u_n.

3. a) Méthode analogue à celle utilisée au **1. a)**.

b) Utiliser l'inégalité trouvée précédemment pour obtenir la majoration demandée.

4. Utiliser la majoration précédente et le théorème des gendarmes, conclure.