Fonctions sinus et cosinus

Parmi l'ensemble des fonctions étudiées, les fonctions sinus et cosinus présentent des particularités spécifiques, notamment la périodicité. L'étude de ces fonctions sur leur période (un intervalle) va permettre d'obtenir la représentation graphique de toute la fonction.

Définition, dérivation

La fonction cosinus, notée cos, est la fonction qui à tout réel x associe le nombre réel $\cos x$.

La fonction sinus, notée sin, est la fonction qui à tout réel x associe le nombre réel $\sin x$.

Propriétés : les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur l'ensemble des réels, donc continues.

Pour tout réel x :

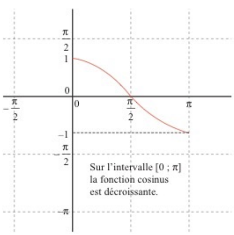
- $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\cos'(ax+b) = -a\sin(ax+b)$.
- $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\sin'(ax+b) = a\cos(ax+b)$.

Exemple : la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(4x+5)$ est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = -12\sin(4x+5)$.

Fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle [0 ; π]

La fonction cosinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	−	0
cos	1 ↘	(0)	↘ −1

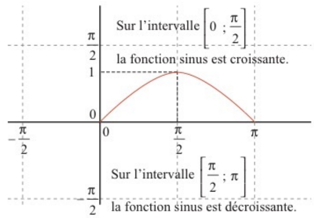


DEUX ARTICLES DU *MONDE* À CONSULTER

- **Un ordinateur dans votre poche** p. 20 (Jean-Marc Chabanas, *Le Monde* daté du 15.09.1973)
- **Le grand saut quantique** p. 21 (David Larousserie, *Le Monde Science et médecine* daté du 05.07.2017)

La fonction sinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x) = \cos(x)$	+	0	−
sin	0 ↗	1	↘ 0

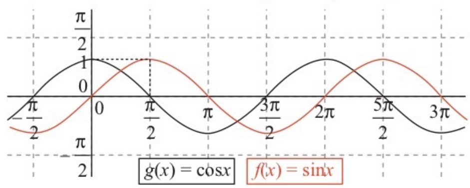


Parité, périodicité des courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus

Pour tout réel x, on a $\cos(-x) = \cos(x)$, donc la fonction cosinus est **paire** et sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour tout réel x, on a $\sin(-x) = -\sin x$, donc la fonction sinus est **impaire** et sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Pour tout réel x, on a $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$, donc les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période 2π**.



MOTS CLÉS

CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Une unité de longueur a été fixée. On appelle cercle trigonométrique tout cercle de rayon 1, muni d'un point origine et d'un sens de rotation (appelé sens direct).

FONCTIONS *cos, sin*

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique d'origine O et A et B les points de $\mathscr{C}$ tel que le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$ soit orthonormal de sens direct.

Soit x un réel et M le point de $\mathscr{C}$ associé à x :

- le cosinus de x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$;
- le sinus de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$.

FONCTION PAIRE

Une fonction f est paire si et seulement si :

- quel que soit le réel $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$;
- C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal.

FONCTION IMPAIRE

Une fonction f est impaire si et seulement si :

- quel que soit le réel $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$;
- Cf est symétrique par rapport à l'origine du repère.

AXE DE SYMÉTRIE

Une droite $\mathscr{D}$ est l'axe de symétrie d'une figure F si et seulement si le symétrique par rapport à $\mathscr{D}$ de tout point M de la figure F est aussi un point de F.

CENTRE DE SYMÉTRIE

Un point I est le centre de symétrie d'une figure F si et seulement si le symétrique par rapport à I de tout point M de la figure F est aussi un point de F.

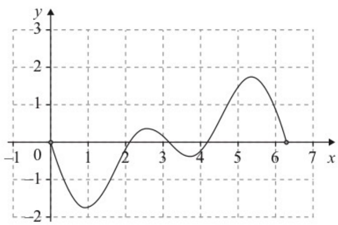
FONCTION PÉRIODIQUE

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période T si et seulement s'il existe un réel $T > 0$ tel que, pour tout réel x :
$f(x+T) = f(x)$.

Sujet inédit

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ par : $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) + 1$.

La courbe préconstruite ci-dessous est la représentation graphique de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.



1. ***a)*** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

b) En utilisant la relation $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$: $f'(x) = -\sin(x)\,[1 + 2\cos(x)]$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$, l'équation produit : $\sin(x)\,[1 + 2\cos(x)] = 0$.

3. ***a)*** En s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction dérivée f' ci-dessus, dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

b) Déduire des questions **2.** et **3.** ***a)*** le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

Préciser les ordonnées des points dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$.

4. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ dans le repère précédent (où f' est déjà représentée).

La bonne méthode

1. *a)* Pour tout réel x :

$\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\cos'(ax + b) = -a\sin(ax + b)$.

b) Mettre $-\sin x$ en facteur dans l'expression de f'.

2. Pour résoudre une équation produit, il faut utiliser la propriété suivante : « un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul ».

3. *a)* Placer les valeurs où f' s'annule, puis les intervalles où elle est positive et négative.

b) Si $f' \geqslant 0$ sur un intervalle I, f est croissante sur I.

Si $f' \leqslant 0$ sur un intervalle I, f est décroissante sur I.

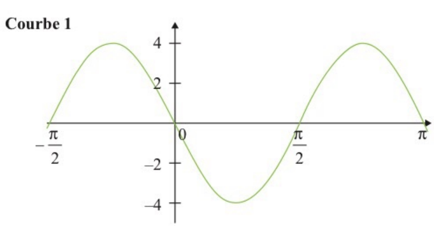
4. Pour représenter graphiquement la fonction , on peut s'aider d'un tableau de valeurs.

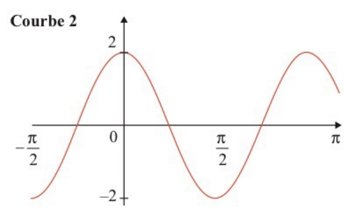
Nouvelle-Calédonie (mars 2013)

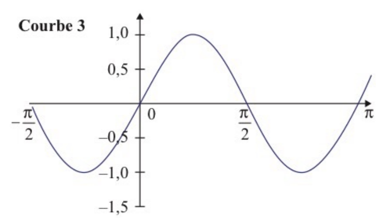
Pour l'énoncé suivant, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

On considère une fonction f, sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.

Proposition : « La courbe 3 est la représentation graphique de f. »







La bonne méthode

Si la courbe représentative de f est la courbe 3, quelle courbe est la représentation de F ?