Fonction exponentielle

C'est en recherchant des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est proportionnelle à la fonction que l'on est conduit à l'étude de la fonction exponentielle. Celle-ci joue un rôle capital en mathématiques car c'est une fonction de référence qui intervient dans de nombreuses lois de probabilité.

Comment la fonction exponentielle est-elle définie ?

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels vérifiant les deux conditions suivantes :

- Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.
- Pour tout réel x, on a : $e^x \times e^{-x} = 1$.

Conséquences : $e^0 = 1$; $e^1 = e \approx 2{,}718$; $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ et $e^{0,5} = \sqrt{e}$.

Comment varie la fonction exponentielle ?

La fonction exponentielle est égale à sa dérivée.

Pour tout nombre réel x, en posant $f(x) = e^x$, on a $f'(x) = f(x)$.

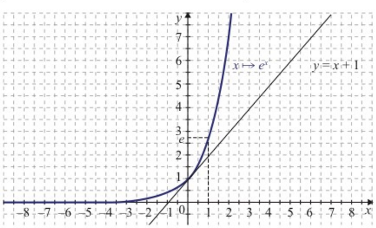
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$, la fonction exponentielle est donc strictement croissante.

Tableau de variation

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x) = e^x$	$+$
$f(x) = e^x$	$0 \nearrow$ (1) $+\infty$

Courbe représentative de la fonction exponentielle



Quelles sont les propriétés de la fonction exponentielle ?

- Relation fonctionnelle : quels que soient les réels x et y, on a : $e^x \times e^y = e^{x+y}$.
- Quels que soient les réels x et y, on a $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.
- Pour tout nombre réel x, on a : $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.
- Pour tout nombre réel x, on a : $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$.
- Pour tout nombre réel x et pour tout entier n, on a : $(e^x)^n = e^{nx}$.

Quelle est la dérivée de la fonction e^u ?

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, alors pour tout réel x appartenant à I, on a : $(e^u)' = u'e^u$.

Équation et inéquation avec la fonction exponentielle

Soit a et b deux nombres réels.

- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$.
- $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$ (l'équivalence est vraie aussi si les inégalités ne sont pas strictes).
- $e^a > e^b$ si et seulement si $a > b$ (l'équivalence est vraie aussi si les inégalités ne sont pas strictes).
- Si, de plus, $b \in \mathbb{R}_+^*$: $e^a = b$ si et seulement si $a = \ln b$.

Quelles sont les limites usuelles de la fonction exponentielle ?

Aux bornes de l'ensemble de définition : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Nombre dérivé en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1$.

Croissances comparées de fonctions $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

UN ARTICLE DU *MONDE* À CONSULTER

• Pour ne pas fondre, le cœur des puces se fragmente p. 25
(*Le Monde* daté du 02.03. 2005)

MOTS CLÉS

FONCTION EXPONENTIELLE

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout nombre réel x ;
- $\exp(0) = 1$.

En posant $f : x \mapsto \exp(x) = e^x$, f est l'unique fonction vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

La fonction exponentielle de base e est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

NOMBRE e

- L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.
- Le nombre e est un nombre irrationnel, voisin de 2,718.
- On dit aussi que le nombre e est la base du logarithme népérien puisque $\ln e = 1$.

LOGARITHME NÉPÉRIEN

- La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1.
- Pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel x tel que $e^x = a$. Ce nombre s'appelle le logarithme népérien de a et on le note $x = \ln a$.
- Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\ln'(1) = 0$.

CROISSANCES COMPARÉES

- Il s'agit de comparer la croissance de la fonction exponentielle et de la fonction $x \mapsto x$ dans le but de lever certaines indéterminations qui peuvent se présenter lors du calcul de limites.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

- On peut retenir la règle opératoire suivante : à l'infini, l'exponentielle de x « l'emporte » sur la fonction $x \mapsto x$.

CROISSANCE EXPONENTIELLE

Lorsqu'on passe d'un terme d'une suite au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre, la suite est géométrique. On parle alors de croissance exponentielle.

Liban (mai 2013)

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \frac{1}{1+e^{-kx}}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$.

On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est donnée en annexe.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

3. On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f'_1(x)$.

En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. On définit le nombre $I = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que $I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.

Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.

On note K le milieu du segment [MP].

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.

2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ sur l'annexe, à rendre avec la copie.

4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_1$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

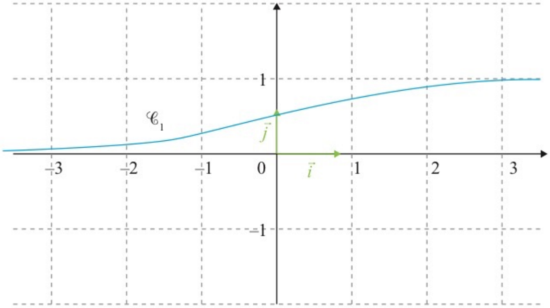
1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.

3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 0{,}99$.

Annexe

Représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1



La bonne méthode

Partie A

1. Pour la recherche des limites, penser à les ramener à des limites usuelles. Quant à l'interprétation graphique, penser aux asymptotes.

2. Deux méthodes possibles : soit remplacer e^{-x} par $\frac{1}{e^x}$, soit multiplier la fraction par e^x, au numérateur et au dénominateur.

3. Deux méthodes : soit on prend la première forme de f_1, en utilisant la formule donnant la dérivée de $\frac{1}{u}$, soit la seconde forme de f_1, en utilisant la formule donnant la dérivée de $\frac{u}{v}$.

4. Utiliser la forme de f_1 de la question **2.**, en remarquant qu'elle peut s'écrire sous la forme $\frac{u'}{u}$ pour déterminer une primitive de f_1.

Partie B

1. Prendre la seconde forme de f_1 pour effectuer le calcul plus facilement.

2. Calculer l'ordonnée du point K.

3. Constater que les deux courbes sont symétriques afin de tracer $\mathscr{C}_{-1}$.

4. Utiliser la symétrie de la question précédente et la valeur de I calculée précédemment.

Partie C

1. Établir une double inégalité stricte.

2. Dériver f_{-1} et conclure.

3. Partir de l'inéquation $k \geqslant 10$, puis par inégalités successives, conclure.

Inde (avril 2013)

Partie A

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.

Le graphique en annexe représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps, en jours.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type : $h(t) = \dfrac{a}{1 + be^{-0,04t}}$ où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres. On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m. Déterminer les constantes a et b que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie B

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur [0 ; 250] par $f(t) = \dfrac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$.

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f).

En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 250].

2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.

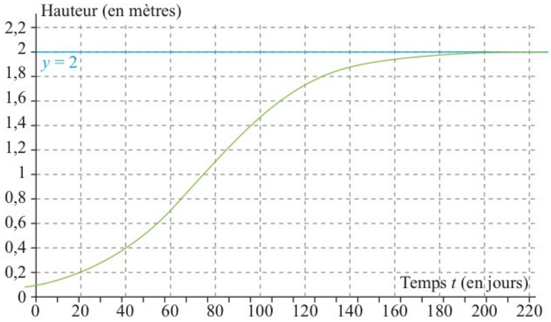
3. *a)* Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 250] on a $f(t) = \dfrac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$.

Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 250] par $F(t) = 50\ln(e^{0,04t} + 19)$ est une primitive de la fonction f.

b) Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle [50 ; 100]. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f. La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t. En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.

Annexe



La bonne méthode

Partie A

Interpréter la limite de la fonction f en $+\infty$ par rapport à la situation concrète, ce qui permettra, avec la valeur en 0 de déduire les coefficients a et b.

Partie B

1. Vérifier que la fonction proposée est la même que celle déterminée précédemment, puis utiliser les formules sur les dérivées.

2. Traduire l'énoncé sous la forme d'une inéquation, puis utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme pour résoudre cette inéquation et répondre au problème.

3. *a)* Multiplier le numérateur et le dénominateur de l'expression initiale de $f(t)$ par $e^{0,04t}$. Dériver F et conclure.

b) Utiliser la formule de la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a ; b]$.

Utiliser la primitive déterminée à la question **3. *a)*** pour calculer l'intégrale.

4. En utilisant le fait que la pente de la tangente en un point M de la courbe représentative de f est égale au nombre dérivé en ce point, lire sur le graphique le point en lequel la pente semble être maximale.