Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est très utile pour simplifier certaines expressions mathématiques. Elle permet de convertir une multiplication en addition, une division en soustraction, une puissance en multiplication, une racine en division et de résoudre des équations et des inéquations contenant des exponentielles.
Elle est utilisée pour définir le pH d'une solution en chimie et l'intensité d'un bruit en physique. On utilise également une échelle logarithmique pour l'échelle de Richter qui mesure la magnitude d'un tremblement de terre.

Comment la fonction logarithme népérien est-elle définie ?

La fonction logarithme népérien, notée *ln*, est la seule fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, qui, à tout réel strictement positif x, associe l'unique solution réelle de l'équation d'inconnue y : $e^y = x$. On note cette solution $y = \ln x$.

John Napier (1550-1617), mathématicien écossais à l'origine des premières tables logarithmiques.
Le logarithme néperien a été baptisé ainsi en son hommage.

Conséquences : quel que soit le nombre réel x strictement positif, on a :

- pour tout réel y : $e^y = x$ si et seulement si $y = \ln x$;
- $e^{\ln x} = x$;
- pour tout nombre réel y : $\ln(e^y) = y$;
- $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$ et $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

Comment la fonction logarithme népérien varie-t-elle ?

On a donc $\ln 1 = 0$ et pour tout réel strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Remarque : la fonction logarithme népérien est aussi définie comme l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Pour tout réel x strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
ln	$-\infty$	(0)	$+\infty$

MOTS CLÉS

LOGARITHME NÉPÉRIEN

- Pour tout réel x strictement positif, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$. Ce nombre s'appelle le logarithme népérien de x et on le note $y = \ln x$.
- La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1. On a donc $\ln 1 = 0$ et pour tout réel strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

PRIMITIVE

On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F **dérivable** sur I et dont la dérivée sur I est la fonction f.

FONCTION EXPONENTIELLE

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
Elle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout nombre réel x ;
- $\exp(0) = 1$.

NOMBRE *e*

- L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e.
- Le nombre e est un nombre irrationnel, voisin de 2,718.
- On dit aussi que le nombre e est la base du logarithme népérien puisque $\ln e = 1$.

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE LA FONCTION ln

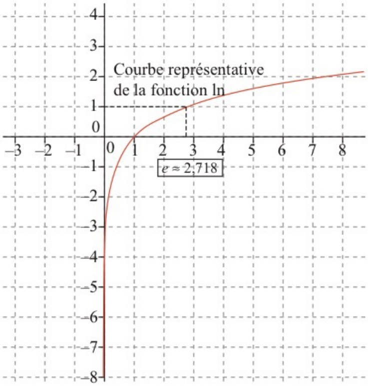
Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tout nombre entier n :

- $\mathbf{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$ (relation fonctionnelle).
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.
- $\ln(a^n) = n\ln a$.
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

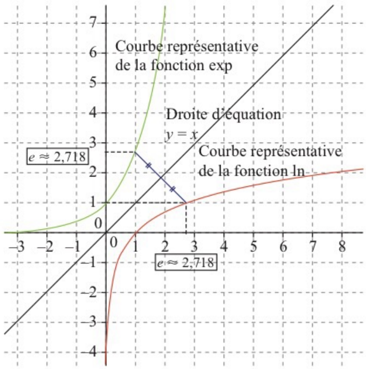
DÉRIVÉE DE ln *u*

Pour une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I, on a : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ sur l'intervalle I.

Courbe représentative de la fonction logarithme népérien



Les courbes représentatives des fonctions *ln* et *exp* sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



Quelles sont les propriétés algébriques de la fonction *ln* ?

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs, et n un nombre entier.

- Relation fonctionnelle : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- logarithme népérien d'un quotient : $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$;
- logarithme népérien d'un inverse : $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$;
- logarithme népérien d'une puissance entière : $\ln(a^n) = n\ln a$;
- logarithme népérien d'une racine carrée : $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Exemple : $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$; $\ln 3 + \ln 4 + \ln\dfrac{1}{12} = \ln(3 \times 4) - \ln 12 = \ln 12 - \ln 12 = 0$.

Équation et inéquation avec la fonction logarithme népérien

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$;
- $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$ (l'équivalence est vraie aussi si les inégalités ne sont pas strictes) ;
- $\ln a > \ln b$ si et seulement si $a > b$ (l'équivalence est vraie aussi si les inégalités ne sont pas strictes).

Exemple :

$\ln(3x + 1) > 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln(3x + 1) > \ln 4 \Leftrightarrow 3x + 1 > 4 \Leftrightarrow 3x > 3 \Leftrightarrow x >$

Quelles sont les limites usuelles de la fonction logarithme népérien ?

Aux bornes de l'ensemble de définition :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Nombre dérivé en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ (ou en 1 de la fonction ln) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln(1 + 0)}{x - 0} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Croissances comparées de fonctions

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Logarithme décimal

Le logarithme décimal est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\log(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Remarque : $\ln 10 > 0$ donc la fonction log est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et $\log 1 = 0$.

Les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal sont les mêmes que celles de la fonction logarithme népérien.

MOTS CLÉS

LIMITES USUELLES

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

CROISSANCES COMPARÉES

Il s'agit de comparer la croissance des fonctions logarithme népérien et $x \mapsto x$ dans le but de lever certaines indéterminations qui peuvent se présenter lors du calcul de limites.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
- On peut retenir la règle opératoire suivante : à l'infini, la fonction $x \mapsto x$ « l'emporte » sur le logarithme népérien.

UN ARTICLE DU *MONDE* À CONSULTER

- **Les mathématiques des fractales luttent contre le bruit** p. 29

(Hervé Morin, *Le Monde* daté du 12.07.2003)

ZOOM SUR...

LE LOGARITHME DÉCIMAL

- La fonction logarithme décimal est la fonction notée log et définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.
- Très utilisée pour les calculs numériques avant l'introduction des calculatrices, la fonction logarithme décimal a aussi de nombreuses applications, notamment en chimie et physique.

LES PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE LA FONCTION log

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tout nombre entier n :

- $\log(ab) = \log a + \log b$ (relation fonctionnelle) ;
- $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$;
- $\log\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\log a$;
- $\log(a^n) = n\log a$;
- $\log\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\log a$.

En particulier pour $a = 10$, on a : $\log 10^n = n\log 10 = n$ car $\log 10 = 1$. La fonction inverse du logarithme décimal est la fonction qui, à un réel x, associe le nombre strictement positif $10^x = e^{x\ln 10}$ qui est l'exponentielle de base 10.

Sujet inédit

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 10]$ par $f(x) = -x\ln x + 2x$.

1. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 10]$ par : $f'(x) = -\ln x + 1$.

2. *a)* Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 10]$.

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 10]$.

3. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé du plan (unités : 1 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées). Représenter graphiquement $\mathscr{C}$ dans ce repère.

4. On considère l'équation (E) : $f(x) = 0$, sur l'intervalle $[1 ; 10]$.

a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E).

b) Pour chacune des solutions trouvées, donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

La bonne méthode

1. Un terme de l'expression de f est un produit.

2. a) Résoudre $-\ln x + 1 > 0$; $-\ln x + 1 < 0$; $-\ln x + 1 = 0$.

b) Il faut déduire le tableau de variation de la question précédente.

3. Pour représenter graphiquement la fonction f, on peut s'aider d'un tableau de valeurs.

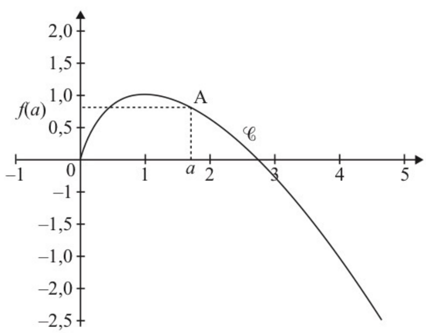
4. a) Pour déterminer le nombre de solutions, Il faut observer la courbe.

b) Pour donner une valeur approchée de la ou des solutions, il faut obtenir un tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice, en changeant le pas de l'intervalle.

Métropole (sept. 2010)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x(1 - \ln x)$.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



Partie A. Étude de la fonction f

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. On admettra que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.

3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse a.

a) Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A′, point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.

b) Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a). Sur la figure, construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

Partie B. Aire sous une courbe

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $\mathscr{A}(a)$ la mesure, en unités d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = e$. Justifier que $\mathscr{A}(a) = \int_a^e f(x)\,\mathrm{d}x$, en distinguant le cas $a < e$ et le cas $a > e$.

La bonne méthode

Partie A

1. Étudier le signe de chaque facteur du produit de l'expression de $f(x)$.

2. Utiliser les opérations sur les limites et les croissances comparées de fonctions.

3. La fonction f est de la forme $u \times v$ donc : $f' = (u \times v)'$

4. a) Déterminer l'équation de la tangente (T_a) au point A d'abscisse a. L'abscisse du point A′ est 0.

b) Pour un point A d'abscisse a donné, il faut trouver une méthode pour placer le point A′. On a $(T_a) = (AA')$.

Partie B

Il faut distinguer les deux cas et montrer que l'égalité est vraie dans les deux cas.