Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Déterminer des limites éventuelles d'une fonction n'a d'intérêt que lorsque x tend vers une borne ouverte de l'ensemble de définition D_f de f. On peut ainsi mettre en évidence la présence éventuelle d'asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de la fonction f.
La notion de continuité permet notamment de résoudre des équations du type $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$, f fonction continue) ou donner une valeur approchée de ses solutions.

Opérations sur les limites

Soit f une fonction définie au voisinage de a. Ici a peut être un nombre réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite d'une somme en a

Si f a pour limite :	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si g a pour limite :	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite :	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$

Limite d'un produit en a

Si f a pour limite :	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si g a pour limite :	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f \times g$ a pour limite :	$l \times l'$	si $l > 0$, $+\infty$ si $l < 0$, $-\infty$	si $l > 0$, $-\infty$ si $l < 0$, $+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite de l'inverse en a

Si g a pour limite :	$l \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\frac{1}{g}$ a pour limite :	$\frac{1}{l}$	$+\infty$ ou $-\infty$	0

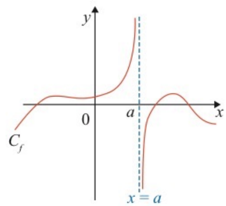
Comment lever une forme indéterminée ?

Les « ? » dans les tableaux précédants signifient que l'on ne peut pas conclure directement : on est en présence d'une « forme indéterminée », donc devant une limite de la forme : $+\infty - \infty$ ou $\infty \times 0$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

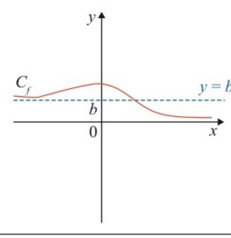
Pour « lever » cette indétermination, il faut transformer l'écriture de la fonction.

Comment détermine-t-on la présence d'asymptotes à la courbe d'une fonction ?

Asymptote verticale d'équation $x = a$:
lorsque
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.



Asymptote horizontale :
d'équation $y = b$:
lorsque
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.



MOTS CLÉS

LIMITE

Soit f une fonction définie au voisinage de a :

• la limite de f en a est $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, si tout intervalle de la forme $]M ; +\infty[$ où $M \in \mathbb{R}$, contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a ;

• la limite de f en a est $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, si tout intervalle de la forme $]-\infty ; M[$ où $M \in \mathbb{R}$, contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a ;

• la limite de f en a est le réel l et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, si tout intervalle de la forme $]l - r ; l + r[$ où $r > 0$, contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a.

FORME INDÉTERMINÉE

Dans un calcul de limites, on a une « forme indéterminée » lorsque l'on ne peut pas conclure directement. Pour « lever » cette indétermination, il faut transformer l'écriture de la fonction :

• soit en factorisant par le terme dominant (cas des fonctions polynômes et rationnelles en $+\infty$ ou $-\infty$) ;

• soit en utilisant la quantité conjuguée (cas des fonctions racines carrées) ;

• soit en revenant à la définition du nombre dérivé (cas des fonctions sous la forme d'un taux d'accroissement).

ASYMPTOTE

• Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

• Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$, à l'infini.

THÉORÈME DES GENDARMES

si $f(x) \leqslant k(x) \leqslant g(x)$ et si

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$

alors $\lim\limits_{x \to a} k(x) = l$.

(valable pour $a \in \mathbb{R}$ ou a qui est $-\infty$ ou $+\infty$)

Comment déterminer la limite d'une fonction en utilisant la comparaison ?

On peut utiliser les théorèmes de limite par comparaison.

Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a, et soit l un nombre réel.

Premier cas : si $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Second cas : si $g(x) \leqslant f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Troisième cas (théorème des gendarmes) :

si $f(x) \leqslant k(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} k(x) = l$.

On peut utiliser les comparaisons directes :

- pour tout réel x, on sait que $x < e^x$;
- pour tout réel x strictement positif : $\ln x < x$.

Qu'est ce qu'une fonction continue ?

Approche graphique : pour une fonction f définie sur un intervalle I, on dit que la fonction f est continue sur I, lorsque sa courbe représentative C_f se trace « sans lever le crayon ».

Propriétés :

- les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur leur ensemble de définition ;
- les fonctions construites à partir des fonctions de référence sont continues sur leurs ensembles de définition ;
- les fonctions polynômes sont continues sur l'ensemble des réels ;
- les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemples :

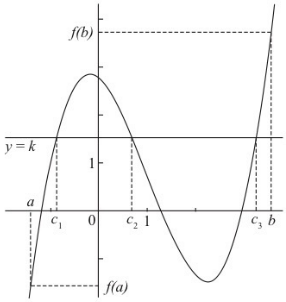
- la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ est continue sur l'ensemble des réels en tant que fonction polynôme ;
- la fonction f définie pour tout réel $x \neq 3$ par $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ en tant que fonction rationnelle.

Propriété des valeurs intermédiaires

Propriété fondamentale des fonctions continues : soit un intervalle I, $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ et f une fonction continue sur I.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

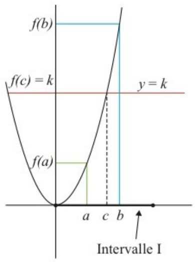
Interprétation graphique : la droite d'équation $y = k$ coupe au moins une fois la courbe représentative de la fonction f en un point dont l'abscisse est comprise entre a et b.



Interprétation en terme d'équation : l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.

(c_1, c_2 et c_3 en utilisant le graphique).

Cas particulier des fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle : soit un intervalle I, $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I. **Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique comprise entre a et b.**



MOTS CLÉS

FONCTION CONTINUE

• Une fonction f, définie sur un intervalle ouvert contenant un réel a, est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

• Une fonction f, définie sur un intervalle I ouvert, est continue sur I lorsque f est continue en tout réel a appartenant à I.

• Une fonction f, définie sur un intervalle [a ; b], est « continue sur $[a ; b]$ » lorsque :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur }]a ; b[\\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \\ \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$$

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

• Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et (a , b) ∈ I2. Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un réel c ∈ $[a ; b]$ tel que f(c) = k.

• Si, de plus, f est strictement monotone sur I, pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = k admet une unique solution c ∈ $[a ; b]$.

RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Les solutions de l'équation $f(x) = k$ avec k ∈ R sont les abscisses des points d'intersection de Cf avec la droite d'équation y = k.

ZOOM SUR...

LA MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

On utilise la méthode par dichotomie pour déterminer une valeur approchée de la solution d'une équation du type f (x) = 0 sur $[a ; b]$ avec une précision donnée :

• on démontre à l'aide du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation f (x) = 0 admet une solution unique sur l'intervalle [a ; b] ;

• on calcule f(c), c étant le milieu de l'intervalle [a ; b] ;

• si $f(a) \times f(c) < 0$, la solution de l'équation est dans]a ; b[, sinon elle est dans]c ; b[;

• on continue en testant le milieu du nouvel intervalle et ce, jusqu'au moment où l'on obtient la précision demandée.

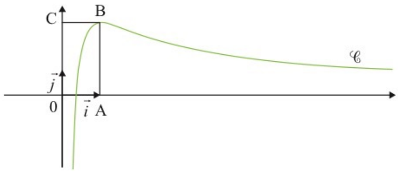
UN ARTICLE DU *MONDE* À CONSULTER

• **La question démographique sert d'excuse** p. 13

(Propos recueillis par Catherine Vincent et Stéphane Foucart, *Le Monde* daté du 09.12.2017)

Métropole (juin 2013)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; i ; j), la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

– les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (1 ; 2), (0 ; 2) ;

– la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;

– il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$.

1. ***a)*** En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

c) En déduire les réels a et b.

2. ***a)*** Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. ***a)*** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1 ; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$. Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

La bonne méthode

1. ***a)*** Considérer le point B d'abscisse 1.

b) Utiliser la formule donnant la dérivée d'un quotient.

c) Utiliser les résultats du **1.** ***a)***.

2. ***a)*** Remplacer dans l'expression de f', a et b par les valeurs trouvées précédemment, et remarquer que x^2 est positif.

b) Utiliser les limites des fonctions usuelles.

c) Déterminer le signe de $-ln(x)$ puis les variations de f. Penser à préciser les bornes et les extremums éventuels.

3. ***a)*** Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

b) Appliquer la technique de balayage.

Polynésie (juin 2010)

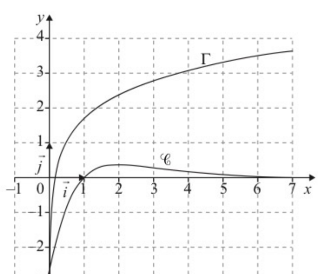
On considère la fonction g définie sur $[1 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$.

1. ***a)*** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1 ; +\infty[$ une unique solution notée α.

b) Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.

On désigne par Γ la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous.



a) En utilisant la courbe Γ, construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

La bonne méthode

1. ***a)*** Il faut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

b) Par définition de α, $g(\alpha) = 0$...

2. ***a)*** Il faut utiliser la bissectrice $\Delta : y = x$.

b) On montre la propriété par récurrence en posant $f(x) = \ln(2x) + 1$, et en utilisant le fait que la fonction f est croissante.

c) (u_n) est croissante et majorée donc convergente. Pour déduire la limite on fait tendre n vers $+\infty$, dans l'équation $u_{n+1} = f(u_n)$.