# Suites

Un couple de lapins, né le 1er janvier, donne naissance à un autre couple de lapins, chaque mois, dès qu'il a atteint l'âge de deux mois. Les nouveaux couples suivent la même loi de reproduction. Combien y aura-t-il de couples de lapins le 1er janvier de l'année suivante, en supposant qu'aucun couple n'ait disparu ?
Pour résoudre ce problème, le mathématicien italien Fibonacci (dit aussi Léonard de Pise) introduit dès 1202 la notion de suite. Ainsi, si on note $u_n$ le nombre de couples de lapins au cours du mois (avec $u_1 = 1$), la suite $(u_n)$ vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On peut alors exprimer $u_n$ en fonction de $n$ et prévoir le nombre de lapins au bout de quelques mois.

## Quand utiliser un raisonnement par récurrence et comment le rédiger ?

On peut utiliser un **raisonnement par récurrence** chaque fois qu'une propriété à démontrer dépend d'un entier naturel $n$, surtout lorsqu'il semble y avoir un lien simple entre ce qui se passe au rang $n$ et ce qui se passe au rang $n + 1$.

Un raisonnement par récurrence se rédige en quatre étapes :

- On commence par énoncer la propriété à démontrer, en précisant pour quels entiers naturels cette propriété est définie.
- **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie au rang initial (qui est souvent 0 ou 1).
- **Hérédité** : on prouve le caractère héréditaire de la propriété. On suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel $n$ arbitrairement fixé et on démontre que la propriété est encore vraie au rang $n + 1$.
- On conclut en invoquant le principe de récurrence.

## Que faut-il retenir sur les suites géométriques ?

Une suite est géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant par le même facteur (la raison que l'on note $q$).

D'où la formule de récurrence donnée pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = q \times u_n$.

Le **terme général d'une suite géométrique** est : $u_n = u_0 \times q^n$.

Enfin, la somme des $(n + 1)$ premiers termes d'une suite géométrique $(u_0 + u_1 + ... + u_n)$ de raison $q \neq 1$ est égale à : $u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Pour tout réel $q$ différent de 1, on a : $1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Pour démontrer qu'une suite $(u_n)$ est géométrique, on peut calculer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Si on obtient un nombre réel indépendant de $n$ alors la suite est géométrique, sinon elle n'est pas géométrique.

## Que faut-il retenir sur les suites arithmétiques ?

Une suite est arithmétique quand on passe d'un terme au suivant en ajoutant un même nombre (la raison que l'on note $r$).

D'où la formule de récurrence donnée pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = u_n + r$.

Le **terme général d'une suite arithmétique** est : $u_n = u_0 + nr$.

Cas particulier pour tout entier $n$, on a : $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

Pour démontrer qu'une suite $(u_n)$ est arithmétique, on peut calculer la différence : $u_{n+1} - u_n$.

Si on obtient un nombre réel indépendant de $n$, alors la suite est arithmétique, sinon elle n'est pas arithmétique.

## MOTS CLÉS

### SUITE

- Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$.
- L'image du naturel $n$ par la suite $u$ se note $u(n)$ ou plus souvent $u_n$.

### TERME GÉNÉRAL

L'image d'un entier naturel $n$ par la suite $u$ se note $u_n$ et s'appelle le **terme général de la suite** ou **terme de rang *n***.

### SUITE CROISSANTE

Soit $u$ une suite :

- la suite $u$ est **croissante** si et seulement si pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ ;
- la suite $u$ est **strictement croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel $n$, $u_n < u_{n+1}$.

### SUITE DÉCROISSANTE

Soit $u$ une suite :

- la suite $u$ est **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant u_{n+1}$ ;
- la suite $u$ est **strictement décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel $n$, $u_n > u_{n+1}$.

### SUITE CONVERGENTE

Si la suite $(u_n)$ admet comme limite le réel $a$, cela signifie que tout intervalle ouvert centré en $a$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit alors que la suite $(u_n)$ **converge** vers $a$.

### SUITE DIVERGENTE

Une suite qui n'est pas convergente est **divergente.**
Dire qu'une suite est divergente peut signifier :

- qu'elle n'a pas de limite, comme pour la suite de terme général $u_n = \cos n$ ;
- que son terme général tend vers l'infini quand $n$ tend vers l'infini, comme pour la suite de terme général $u_n = n + 1$.

### RAISON D'UNE SUITE

- Dans une **suite arithmétique**, on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours un **même nombre *r***, appelé **raison de la suite arithmétique**.
- Dans une **suite géométrique**, on passe toujours d'un terme au suivant en multipliant par un **même nombre *q***, appelé **raison de la suite géométrique**.

## Comment déterminer la limite d'une suite ?

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$.

La limite de la suite $(u_n)$ dépend de son premier terme $u_0$ non nul et de sa raison $q$.

Quel que que soit $u_0$, si $-1 < q < 1$, alors la limite de la suite sera nulle.

Lorsque $u_0$ est positif :

- si $q > 1$, la limite de la suite sera égale à $+\infty$ ;
- si $q \leq -1$, la suite n'aura pas de limite.

Lorsque $u_0$ est négatif :

- si $q > 1$, la limite de la suite sera égale à $-\infty$ ;
- si $q \leq -1$, la suite n'aura pas de limite.

Si la suite $(u_n)$ admet comme limite le réel $l$, alors tout intervalle ouvert centré en $l$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit que la suite $(u_n)$ converge vers $l$.

Pour étudier la limite d'une suite, on peut exprimer le terme général de la suite en fonction de $n$ et déterminer la limite de ce terme en faisant tendre $n$ vers l'infini. Ou bien, on peut utiliser les **théorèmes de comparaison**.

*Premier cas* : si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

*Second cas* : si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$,alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

*Troisième cas* : si $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$.

**(théorème des « gendarmes »)**

Enfin, il convient de se souvenir que toute suite croissante majorée est convergente et que toute suite décroissante minorée est également convergente :

- une suite $(u_n)$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout naturel $n$, $u_n \leqslant$ M ;
- une suite $(u_n)$ est **minorée** s'il existe un réel $m$ tel que, pour tout naturel $n$, $u_n \geqslant m$ ;
- une suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

### UN ARTICLE DU *MONDE* À CONSULTER

• **La divine proportion** p. 9
(Étienne Ghys, *Le Monde* daté du 11.04.2013)

## Comment calculer la limite d'une somme des premiers termes d'une suite géométrique ?

On travaillera ici uniquement avec des suites géométriques de raison strictement positive.

**Exemple** : déterminer la limite de : $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

*Première étape* : reconnaître la somme d'une suite géométrique.

On reconnaît la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

On sait que : $S_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Donc : $S_n = u_0 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$.

D'où : $S_n = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

*Seconde étape* : on utilise les résultats de la partie 3.

On est dans le premier cas, car $q = \frac{1}{2}$ est strictement compris entre 0 et 1, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

*Troisième étape* : on conclut, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$.

On peut généraliser cette démarche avec une propriété.

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $q$, strictement comprise entre 0 et 1. Soit $S_n$ la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite $(u_n)$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{u_0}{1 - q}$.

## Qu'est qu'une suite arithmético-géométrique ?

**Définition** : on dit qu'une suite $(u_n)$ est une suite arithmético-géométrique s'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que, $u_0$ étant donné, on a pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = au_n + b$.

On peut donc calculer chaque terme d'une suite arithmético-géométrique en utilisant les coefficients $a$ et $b$ et le terme précédent.

# MOTS CLÉS

### LIMITE D'UNE SOMME

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ? | $-\infty$ |

### LIMITE D'UN PRODUIT

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ | $l$ | $l \neq 0$ | $l \neq 0$ | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$ | $l \times l'$ | si $l > 0$, $+\infty$ si $l < 0$, $-\infty$ | si $l > 0$, $-\infty$ si $l < 0$, $+\infty$ | ? | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

### LIMITE D'UN INVERSE

| | | | |
|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ | $l \neq 0$ | 0 | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} =$ | $\dfrac{1}{l}$ | en $0^+$, ou $+\infty$ en $0^-$, ou $-\infty$ | 0 |

### LIMITE D'UN QUOTIENT

On se ramène au cas d'un produit pour $\dfrac{u_n}{v_n}$ car $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$.

# ZOOM SUR...

### LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

On utilise un **raisonnement par récurrence** chaque fois qu'une propriété à démontrer dépend d'un entier naturel $n$, surtout lorsqu'il semble y avoir un **lien** simple entre ce qui se passe au **rang** $n$ et ce qui se passe au **rang** $n + 1$ :

• on énonce la propriété à démontrer, en précisant pour quels entiers naturels cette propriété est définie ;

• on vérifie que la propriété est vraie au rang initial (qui est souvent 0 ou 1) ;

• on prouve le caractère héréditaire de la propriété ; on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel $n$ arbitrairement fixé et on démontre que la propriété est encore vraie au rang $n + 1$ ;

• on conclut que, quel que soit l'entier natutel $n$, la propriété est vraie .

# Métropole (juin 2013)

Soit la suite numérique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

**1.** ***a)*** Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$. On pourra en donner des valeurs approchées à $10^{-2}$ près.

***b)*** Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

**2.** ***a)*** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant n + 3$.

***b)*** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

***c)*** En déduire une validation de la conjecture précédente.

**3.** On désigne par $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

***a)*** Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

***b)*** En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

***c)*** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**4.** Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

***a)*** Exprimer $S_n$ en fonction de $n$.

***b)*** Déterminer la limite de la suite $(T_n)$.

## La bonne méthode

**1. *a)*** On remplace $n$ par 0 dans la relation de récurrence de l'énoncé pour déduire $u_1$, puis $n$ par 1 pour obtenir $u_2$, etc.

***b)*** Ordonner les termes successifs de la suite et conclure.

**2. *a)*** Démontrer la propriété par récurrence.

***b)*** Remplacer $u_{n+1}$ par l'expression donnée dans l'énoncé en fonction de $u_n$.

***c)*** Utiliser le résultat du **2. b)** et l'inégalité du **2. a)**.

**3. *a)*** Exprimer pour un entier naturel $n$, $v_{n+1}$ en fonction de $u_n$ puis en fonction de $v_n$ et conclure.

***b)*** Exprimer $v_n$ en fonction de $v$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

***c)*** Utiliser la propriété du cours donnant la limite de la suite $(q^n)$ avec $-1 < q < 1$.

**4. *a)*** Décomposer $S_n$ comme la somme d'une somme de termes d'une suite géométrique et d'une somme de termes d'une suite arithmétique.

***b)*** Utiliser à nouveau la propriété du cours donnant la limite de la suite $(q^n)$ avec $-1 < q < 1$.

---

# Antilles-Guyane (sept. 2010)

On considère la suite de nombres réels $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

**1.** Calculer $u_2$ et en déduire que la suite $(u_n)$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.

**2.** On définit la suite $(v_n)$ en posant, pour tout entier naturel $n$ : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

***a)*** Calculer $v_0$.

***b)*** Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.

***c)*** En déduire que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

***d)*** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

**3.** On définit la suite $(w_n)$ en posant, pour tout entier naturel $n$ : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

***a)*** Calculer $w_0$.

***b)*** En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer $w_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et de $v_n$.

***c)*** En déduire que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

***d)*** Exprimer $w_n$ en fonction de $n$.

**4.** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{2n - 1}{2^n}$.

**5.** Pour tout entier naturel $n$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $S_n = 2 - \frac{2n + 3}{2^n}$.

## La bonne méthode

**1.** La connaissance de $u_2$ nous permet de comparer $u_2 - u_1$ et $u_1 - u_0$, puis $\frac{u_2}{u_1}$ et $\frac{u_1}{u_0}$ et de conclure.

**2. *a)*** Utiliser la définition de $v_n$ en fonction de $u_n$.

***b)*** Utiliser la définition de $v_n$ en fonction de $u_n$ et la relation de récurrence entre $u_{n+2}$, $u_{n+1}$ et $u_n$.

***c)*** Revenir à la définition d'une suite géométrique et ne pas oublier de préciser son premier terme.

***d)*** Utiliser une propriété d'une suite géométrique.

**3. *a)*** Remplacer $n$ par 0 dans la relation donnée dans l'énoncé.

***b)*** Remplacer dans $w_{n+1}$, $v_{n+1}$ et $u_{n+1}$ en fonction de $v_n$ et $u_n$, puis conclure.

***c)*** Utiliser l'égalité obtenue précédemment et la définition de $w_n$.

***d)*** Reconnaître la nature de la suite $(w_n)$ puis utiliser la propriété *ad hoc*.

**4.** $v_n$ et $w_n$ ont été exprimés en fonction de $n$, d'où $u_n$.

**5.** $v_n$ et $w_n$ ont été exprimés en fonction de $n$, d'où $u_n$. Démonstration par récurrence.