Lois à densité

Après avoir étudié dans le précédent chapitre les probabilités sur des cas discrets (des nombres particuliers), on va ici les considérer sur un intervalle (toutes les valeurs possibles entre deux nombres).
On verra ainsi comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire, mais aussi comment calculer ses paramètres : espérance, variance et écart type.

Qu'est-ce qu'une loi à densité sur un intervalle I ?

La fonction f est une fonction de densité sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ ($a < b$), si :

- la fonction f est continue sur $[a\ ;\ b]$;
- la fonction f est positive sur $[a\ ;\ b]$;
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$.

La variable aléatoire X suit la loi à densité (ou loi continue) de fonction de densité f, si $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque : $P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b)$.

Qu'est-ce que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire de densité ?

Soit X une variable aléatoire de densité f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

Loi uniforme

Définition : une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ ($a < b$), lorsqu'elle admet comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{b-a}$ sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, avec $f(x) = 0$ en dehors de l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

La représentation graphique d'une fonction f ainsi définie est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Espérance de la loi uniforme : si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a\ ;b]$, alors $E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}$.

Propriété : si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ ($a < b$), pour tout intervalle $[c\ ;\ d] \subset [a\ ;\ b]$, on a :
$P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$.

Loi exponentielle

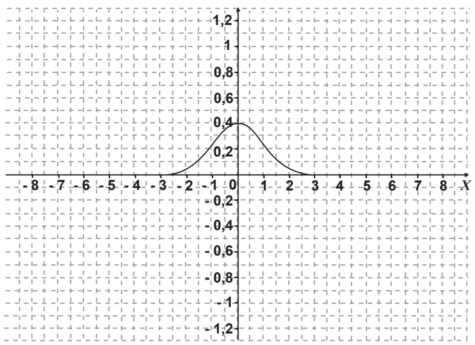
Définition : une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur l'ensemble des réels, lorsqu'elle admet comme densité de probabilité la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Pour tout $t > 0$, la probabilité de l'événement $\{X \leqslant t\}$ est donnée par $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.

Espérance de la loi exponentielle : si la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Loi normale centrée réduite

Définition : une variable aléatoire de densité f suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, lorsque $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$.



Représentation graphique de f

MOTS CLÉS

FONCTION DE DENSITÉ (CAS GÉNÉRAL)

f est une fonction de densité sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ ($a < b$), si :
- f est continue sur $[a\ ;\ b]$;
- f est positive sur $[a\ ;\ b]$;
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$.

La variable aléatoire X suit la loi à densité (ou loi continue) de fonction de densité f, si $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

ESPÉRANCE (CAS GÉNÉRAL)

Soit X une variable aléatoire de densité f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

FONCTION DE DENSITÉ (LOI UNIFORME)

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ ($a < b$), lorsqu'elle admet comme densité de probabilité la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$ sur $[a\ ;\ b]$ et $f(x) = 0$ en dehors de $[a\ ;\ b]$.

ESPÉRANCE (LOI UNIFORME)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$. L'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

FONCTION DE DENSITÉ (LOI EXPONENTIELLE)

La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur $\mathbb{R}$, lorsqu'elle admet comme densité de probabilité la fonction f définie par :
$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

ESPÉRANCE (LOI EXPONENTIELLE)

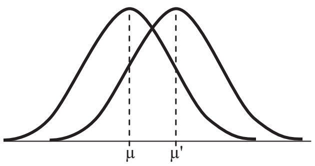
Soit X la variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. L'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

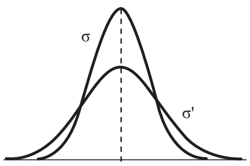
FONCTION DE DENSITÉ DE $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$

Une variable aléatoire de densité f suit la loi normale centrée réduite, notée N(0 ; 1), lorsque $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$.

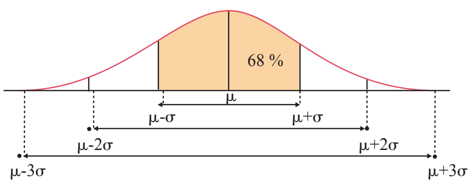
Espérance, variance et écart type de la loi $N(0\ ;\ 1)$: si X suit la loi $N(0\ ;\ 1)$, on a $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
L'écart type est $\sqrt{V(X)} = 1$.
Valeurs remarquables : $P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95$; $P(-2{,}58 \leqslant X \leqslant 2{,}58) \approx 0{,}99$.

Loi normale de paramètres μ et σ^2 : $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$





Définition : une variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$ lorsque $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $N(0\ ;\ 1)$.
Influence des paramètres : la courbe est symétrique par rapport à la droite $x = \mu$, qui caractérise donc la tendance centrale. Quant à σ, il caractérise la dispersion de la distribution. Plus il est grand, plus la distribution est « étalée » de part et d'autre de μ. Les abscisses des points d'inflexion sont égales à $\mu - \sigma$ et $+ \sigma$.
Espérance, variance et écart type : si X suit la loi $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$, on a $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.
L'écart type est $\sqrt{V(X)} = \sigma$.
Les intervalles un, deux, trois sigmas :
$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$ au centième près.
$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$ au centième près.
$P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$ au millième près.



Exemples de calcul de probabilités à la calculatrice dans le cadre de la loi normale

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(100\ ;\ 5^2)$.

- On calcule $P(93 \leqslant X \leqslant 103) \approx 0{,}64$ au centième près en utilisant les méthodes suivantes.

Avec une CASIO
Dans les menus « STAT », puis « DIST », puis « NORM », puis « ncd », entrer :

```
Normal        C.D.
Lower : 93
Upper : 103
σ     : 5
μ     : 100
```

Avec une T.I.
En utilisant le menu « DISTR », entrer :

```
normalcdf(93,103,
100,5)
          0.644991
```

- On cherche la valeur de x tel que $P(X \leq x) = 0{,}7$ en utilisant les méthodes suivantes.

Avec une CASIO
Dans les menus « STAT », puis « DIST », puis « NORM », puis « InvN », entrer :

```
Inverse Normal
Trail  : Left
Area   : 103
σ      : 5
μ      : 100
```

$x \approx 102{,}6$ au dixième près.
Avec une T.I.
En utilisant le menu « DISTR », entrer :

```
invNorm(0,7,100,
5)
          102.622
```

DEUX ARTICLES DU *MONDE* À CONSULTER

- **Une notion dont l'importance s'affirme sans cesse : la fiabilité** p. 54-55
(*Le Monde* daté du 10.02.1964)
- **Finance, maths et humanités** p. 55
(Christian Walter, *Le Monde* daté du 19.09.2008)

MOTS CLÉS

ESPÉRANCE DE $N(0\ ;\ 1)$
Si la variable aléatoire X suit la loi $N(0\ ;\ 1)$, $E(X) = 0$.

VARIANCE DE $N(0\ ;\ 1)$
Si la variable aléatoire X suit la loi $N(0\ ;\ 1)$, $V(X) = 1$.

ÉCART TYPE DE $N(0\ ;\ 1)$
Si la variable aléatoire X suit la loi $N(0\ ;\ 1)$, l'écart type de X est $\sqrt{V(X)} = 1$.

$U_{0,05}$
$P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95$

$U_{0,01}$
$P(-2{,}58 \leqslant X \leqslant 2{,}58) \approx 0{,}99$

LOI NORMALE $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$
La variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$, lorsque la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $N(0\ ;\ 1)$.

ESPÉRANCE DE $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$
Si la variable aléatoire X suit la loi $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$, $E(X) = \mu$.

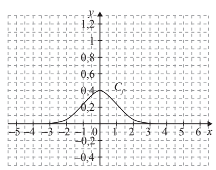
VARIANCE DE $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$
Si la variable aléatoire X suit la loi $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$, $V(X) = \sigma^2$.

ÉCART TYPE DE $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$
Si la variable aléatoire X suit la loi $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$, l'écart type de X est $\sqrt{V(X)} = \sigma$.

INTERVALLES σ, 2σ ET 3σ
$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$
$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$

ZOOM SUR…

LA LOI $N(0\ ;\ 1)$
La fonction de densité f d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite $N(0\ ;\ 1)$ est : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$.



f est continue et f est paire.

Liban (mai 2013)

L'entreprise Fructidoux fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ». La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme. L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

(Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.)

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale.

On considère les événements :

- E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2. » ;
- C : « Le petit pot est conforme. ».

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2. Calculer la probabilité de l'événement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »

3. Déterminer la probabilité de l'événement C.

4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement E sachant que l'événement C est réalisé.

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.

On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart type $\sigma_1 = 0,006$.

Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.

On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart type σ_2.

On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99.

Soit Z la variable aléatoire définie par : $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

β	$P(-\beta \leq Z \leq \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

a) Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

b) Déterminer, en fonction de σ_2, l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18].

c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2. On pourra utiliser le tableau donné ci-contre, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 1.

La bonne méthode

Partie A

1. Traduire les données de l'exercice en probabilités et les placer dans l'arbre en commençant par le choix de la chaîne de fabrication.

2. Appliquer la formule des probabilités conditionnelles.

3. Appliquer la formule des probabilités totales en trouvant une partition de C.

4. Traduire la probabilité recherchée à l'aide des événements préalablement définis puis appliquer la formule des probabilités conditionnelles.

Partie B

1. Traduire la probabilité recherchée à l'aide de la variable aléatoire définie, puis utiliser le tableau donné.

2. ***a)*** Appliquer le cours sur la loi normale.

b) Déduire l'encadrement recherché à partir de l'encadrement donné.

c) Chercher dans le tableau la valeur de β qui correspond à une probabilité de 0,99. Puis résoudre une équation pour obtenir σ_2.

Sujet inédit

Une fabrique de desserts dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des pots de crème glacée.
La masse en grammes de crème glacée contenue dans chacun des pots peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 100 d'écart type 0,43.
Afin de contrôler le remplissage des pots, le responsable qualité souhaite disposer de certaines probabilités.
Le tableau ci-dessous présente le calcul, effectué à l'aide d'un tableur, des probabilités de quelques événements pour une loi normale de moyenne 100 et d'écart type 0,43.

a	$p(X \leq a)$
98	0,00000165
98,5	0,00024299
99	0,01002045
99,5	0,12245722
100	0,50000000
100,5	0,87754278
101	0,98997955
101,5	0,99975701
102	0,99999835

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.
Pour les calculs de probabilités, on utilisera éventuellement le tableau précédent ou la calculatrice.

1. ***a)*** Déterminer la probabilité de l'événement « $X > 99$ ».

b) Déterminer la probabilité de l'événement « $99 \leq X \leq 101$ ».

c) Le pot est jugé conforme lorsque la masse de crème glacée est comprise entre 99 grammes et 101 grammes.
Déterminer la probabilité pour qu'un pot prélevé aléatoirement soit non conforme.

2. Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la chaîne de production, on admet que la proportion p de pots conformes dans la production est 98 %.

a) L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des pots conformes sur un échantillon de taille n est :

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

Déterminer les bornes de l'intervalle I pour un échantillon de taille 120.

b) On contrôle régulièrement la chaîne de production en prélevant des échantillons de 120 pots de manière aléatoire. Au cours d'un de ces contrôles, un technicien compte 113 pots conformes.
En utilisant l'intervalle de fluctuation précédent, prendra-t-on la décision d'effectuer des réglages sur la chaîne de production ?

La bonne méthode

1. ***a)*** Il faut penser à utiliser l'événement complémentaire.

b) Pour tout a et b réels tels que $a < b$, $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$.

c) Il faut utiliser la question **1. *b)***.

2. ***a)*** Il faut remplacer p et n par leurs valeurs dans l'expression de I.

b) Il faut déterminer si 113 appartient ou non à l'intervalle trouvé à la question **2. *a)***.

Sujet inédit

Un grossiste spécialisé dans le jardinage reçoit des sachets de graines d'aubergines « bio » (c'est-à-dire issues de l'agriculture biologique) en grande quantité. On s'intéresse à la masse d'un sachet.

La variable aléatoire qui, à chaque sachet, associe sa masse en grammes est notée Y.
On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart type 8.

1. Calculer $P(Y \geq 104)$.

2. Un sachet dont la masse en grammes n'est pas dans l'intervalle [104 ; 136] est rejeté. Calculer la probabilité qu'un sachet soit rejeté.

La bonne méthode

1. Il faut se ramener à la loi normale centrée réduite.

2. Pour tout a réel, $P(-a \leq Z \leq a) = 2\,P(Z \leq a) - 1$.