Probabilités conditionnelles

Les probabilités conditionnelles prennent en compte les informations concernant l'issue d'une expérience qui modifient la probabilité des événements liés à cette expérience. On parle de probabilités conditionnelles lorsque deux événements d'une expérience aléatoire se réalisent l'un après l'autre. On regarde alors l'influence du premier sur le second.

Qu'est-ce qu'une probabilité ?

On part d'une expérience aléatoire E, on détermine l'univers Ω (l'ensemble de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire) ; on a $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Définir une probabilité, c'est associer à chaque issue e_i un nombre p_i de façon que les deux propriétés suivantes soient vérifiées : $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Généralement, pour déterminer les probabilités (les nombres p_i), on a deux possibilités :

- soit on fait une **hypothèse d'équiprobabilité** et on associe à toutes les issues la même probabilité $p_i = \frac{1}{n}$;
- soit on fait une **étude statistique** et on définit alors p_i comme la fréquence de l'issue e_i au cours d'un grand nombre de répétitions.

La **probabilité d'un événement A** dans le cas équiprobable est :

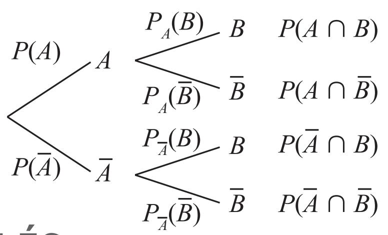
$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}.$$

Ce qu'on énonce parfois sous la forme :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Comment calculer une probabilité conditionnelle ?

On considère une expérience aléatoire et deux événements A et B quelconques de probabilités non nulles. L'événement A est réalisé puis l'événement B. On peut visualiser la situation en utilisant un arbre pondéré :



La « probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé », notée $P_A(B)$, peut se calculer en utilisant un arbre.

En effet, on a : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, donc $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (si $P(A) \neq 0$).

Par analogie, on en déduit que la « probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé », notée $P_B(A)$, sera égale à : $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (si $P(B) \neq 0$).

Propriétés : $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$;

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$;

$P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$.

Exemple : dans une population lycéenne, 40 % des élèves aiment les mathématiques, 25 % aiment la physique et 10 % aiment à la fois les mathématiques et la physique. On prend un élève au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il aime la physique, sachant qu'il aime les mathématiques ? Soit A l'événement « l'élève aime les mathématiques » et B l'événement « l'élève aime la physique ». L'énoncé donne $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}25$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. On cherche la probabilité pour que l'élève aime la physique sachant qu'il aime les mathématiques, c'est-à-dire la probabilité de B sachant A : $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$.

Comment montrer que deux événements sont indépendants ?

Intuitivement, deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un de ces événements n'influe pas sur la probabilité de l'autre. On doit donc avoir : $P_A(B) = P(B)$.

A et B sont donc indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Attention à ne pas confondre incompatibles et indépendants :

- A et B sont donc **incompatibles** si et seulement si : $P(A \cap B) = 0$;
- A et B sont donc **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

MOTS CLÉS

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue (le résultat) dépend du hasard.

UNIVERS

Soit E une expérience aléatoire. On appelle univers l'ensemble constitué de toutes les issues possibles de cette expérience.

ÉVÉNEMENT

• Soit E une expérience aléatoire et $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, l'univers associé à E. On appelle événement de l'expérience aléatoire E tout sous-ensemble de Ω.

• On appelle événement élémentaire, un événement constitué d'un seul élément de Ω, c'est-à-dire constitué d'une seule issue $\{e_i\}$.

• La probabilité $P(A)$ d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui le constituent.

ISSUES ÉQUIPROBABLES

Soit $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire E.

Si toutes les issues ont la même probabilité $p_i = \frac{1}{n}$, on dit que l'on est dans une situation d'équiprobabilité.

CARDINAL (D'UN ENSEMBLE)

Soit E un ensemble fini. Le cardinal de E est le nombre d'éléments de cet ensemble. On le note card E.

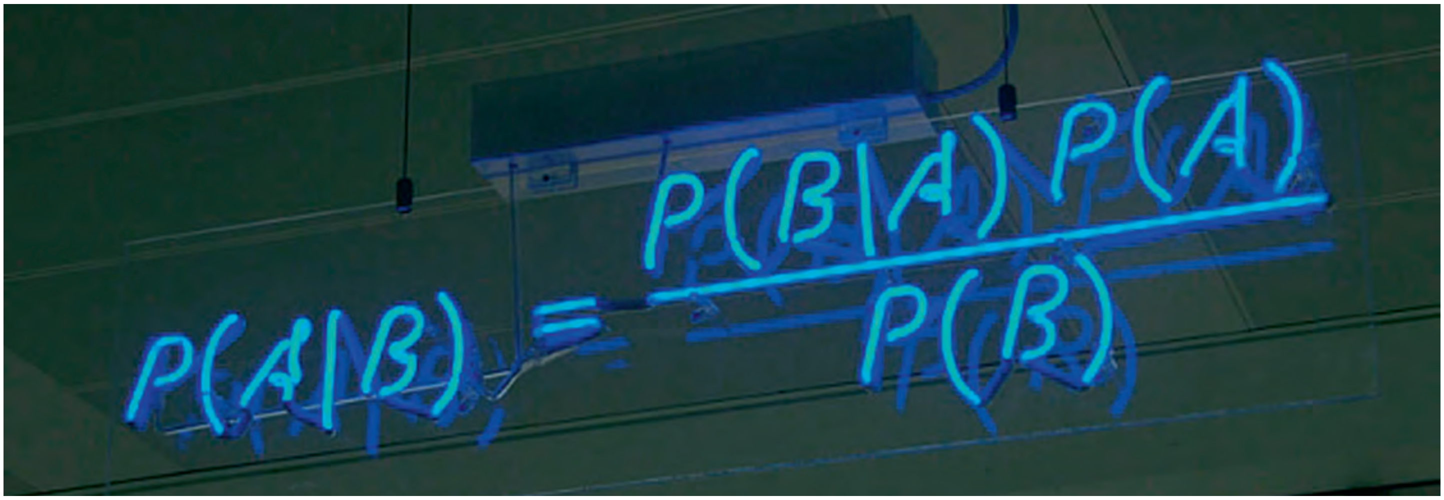
PARTITION

• Une partition est un ensemble d'événements qui séparent en « paquets distincts » toutes les issues d'une expérience (c'est-à-dire l'univers). Les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ réalisent une partition de l'univers Ω si : $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$; $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tout $i \neq j$.

• On considère souvent la partition élémentaire A, $\overline{A}$.

VARIABLE ALÉATOIRE

Soient E une expérience aléatoire et Ω l'univers associé. Une variable aléatoire X est simplement une application qui, à chaque issue de l'univers, associe un nombre réel. Autrement dit, en langage fonctionnel, c'est une fonction de l'univers dans l'ensemble des nombres réels, $X : \Omega \to \mathbb{R}$.



Formule de Bayes

Comment utiliser la formule des probabilités totales ?

Ayant une partition $A_1, A_2, ..., A_n$, on considère un événement B quelconque. En écrivant que les issues qui constituent B se séparent en celles qui appartiennent à A_1, celles qui appartiennent à A_2, ..., celles qui appartiennent à A_n, on obtient : $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$.

Sachant que $P(B \cap A_i) = P(A_i)\, PA_i(B)$, on peut aussi écrire :

$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + ... + P(A_n)P_{A_n}(B)$.

Dans le cas de la partition élémentaire avec A et $\bar{A}$, pour tout événement B, on a : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

Qu'est-ce qu'une loi de probabilité ?

E est une expérience aléatoire et Ω l'univers associé. Soit une variable aléatoire X définie sur Ω. $X(\Omega)$ étant l'ensemble des valeurs prises par X, on a $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... ; n\}$.

UN ARTICLE DU *MONDE* À CONSULTER

- **Maladie de Lyme, une énigme coriace** p. 47-49
(Pascale Santi, *Le Monde* daté du 04.07.2018)

La **loi de probabilité de *X*** attribue à chaque valeur x_i la probabilité p_i de l'événement $(X = x_i)$ constitué de les événements élémentaires dont l'image par X est x_i.

On la présente généralement sous la forme d'un tableau à double entrée :

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	total
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	1

On a alors $0 \leqslant p_i \leqslant 1$, avec $p_i = P(X = x_i)$, et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Qu'est-ce qu'une loi binomiale ?

On considère une expérience aléatoire E, un événement A lié à E de probabilité non nulle, avec $P(A) = p$. On appelle « succès » la réalisation de A et « échec » celle de $\bar{A}$.

On **répète** n fois l'expérience E dans des **conditions identiques** et de manière indépendante. Soit X la variable aléatoire comptant le **nombre de succès** au cours des n répétitions. X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p, notée $B(n, p)$.

On a alors : $\begin{cases} X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... ; n\} \\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p. \end{cases}$

MOTS CLÉS

ÉVÉNEMENTS DISJOINTS

On dit que deux événements A et B sont disjoints ou incompatibles lorsqu'ils n'ont aucune issue (ou événement élémentaire) en commun. Dans ce cas, on a :
- $P(A \cap B) = \varnothing$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

ESPÉRANCE

- Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est $p_i = P(X = x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Autrement dit, la loi de X est :

X	x_1	x_2	...	x_n	total
P	p_1	p_2	...	p_n	1

L'espérance de X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n.$$

- L'espérance est la « moyenne » des valeurs prises par X lors d'un grand nombre de répétitions de l'expérience.

VARIANCE

- Soit X une variable aléatoire sur une population de taille n :

X	x_1	x_2	...	x_p	total
Effectif	n_1	n_2	...	n_p	n

n_i est l'effectif de x_i (nombre de fois où l'on prend la valeur x_i).
- Soit $\bar{X}$ la moyenne de X. La variance de X est le nombre noté $V(X)$ et défini par :

$$V(X) = \frac{1}{n}\left[n_1(x_1 - \bar{X})^2 + n_2(x_2 - \bar{X})^2 + ... + n_p(x_p - \bar{X})^2\right].$$

- On a aussi : $V(X) = \frac{1}{n}\left[n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + ... + n_p x_p^2\right] - \bar{X}^2$.
- La variance est un paramètre de dispersion de la série. Elle mesure la façon dont les valeurs de X se dispersent autour de la moyenne.

ÉCART TYPE

- L'écart type d'une série statistique simple ou d'une variable aléatoire X est le nombre $s(X)$ égal à la racine carrée de la variance : $s(X) = \sqrt{V(X)}$.
- L'écart type mesure la façon dont les valeurs de X se dispersent autour de la moyenne.

Métropole (juin 2013)

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des feuillus. La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères, alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock. On envisage les événements suivants :

H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 » ;
H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 » ;
H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 » ;
C : « l'arbre choisi est un conifère » ;
F : « l'arbre choisi est un feuillu ».

a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

c) Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.

d) L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? (On arrondira à 10^{-3}.)

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? (On arrondira à 10^{-3}.)

c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins 2 feuillus ? (On arrondira à 10^{-3}.)

La bonne méthode

1. ***a)*** Interpréter les données de l'exercice et les placer dans l'arbre pondéré.

b) Appliquer la formule des probabilités composées.

c) Mettre en évidence une partition, puis appliquer la formule des probabilités totales.

d) Appliquer la formule des probabilités conditionnelles.

2. ***a)*** Vérifier les conditions permettant de prouver que X suit bien une loi binomiale.

b) Utiliser la formule de la loi binomiale.

c) Utiliser la notion d'événement contraire et la formule de la loi binomiale.

Métropole (juin 2011)

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

– la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test) ;

– la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement : « la personne est contaminée par le virus », et T l'événement : « le test est positif ». $\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1. ***a)*** Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$ et $P_{\overline{V}}(\overline{T})$. Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b) En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3. ***a)*** Justifier par un calcul la phrase : « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de "chances" que la personne soit contaminée ».

b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

(Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.)

La bonne méthode

1. ***a)*** Utiliser les données de l'énoncé.

b) Appliquer la formule des probabilités composées.

2. Utiliser la formule des probabilités totales.

3. ***a)*** Utiliser la formule des probabilités conditionnelles.

b) Utiliser de nouveau la formule des probabilités conditionnelles, ainsi que la probabilité de l'événement complémentaire.