Nombres complexes

Au XVIe siècle, les mathématiciens italiens Cardan et Bombelli introduisirent des nombres « imaginaires », ayant un carré négatif, pour résoudre des équations du troisième degré. Deux siècles plus tard, Euler et d'Alembert parachevèrent la création des nombres complexes et fixèrent les notations actuelles, en particulier celle du nombre i. Aujourd'hui, les nombres complexes sont utilisés non seulement dans toutes les branches des mathématiques, en particulier en trigonométrie et en géométrie, mais aussi dans d'autres sciences, comme la physique.
Dans cette leçon, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Quelles sont les différentes formes sous lesquelles peut se présenter un nombre complexe non nul ?

Un nombre complexe z, non nul, admet trois types d'écriture :

- une écriture **algébrique** :

$z = x + iy$, où x et y sont deux nombres réels ; $x = \mathrm{Re}(z)$ est la partie réelle de z et $y = \mathrm{Im}(z)$, sa partie imaginaire ;

- une écriture **trigonométrique** :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, où r désigne le **module** de z et θ un **argument** de z ;

- une écriture **exponentielle** : $z = re^{i\theta}$.

Selon le cas, on privilégie une écriture parmi les trois.

Le mathématicien Leonhard Euler (1707-1783).

Comment calculer le module et un argument d'un nombre complexe z non nul ?

Si le nombre complexe z est donné sous sa forme algébrique $z = x + iy$, on commence par calculer le module r à l'aide de la formule :
$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Puis on détermine un argument θ de z en calculant : $\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{|z|}$.

Soient deux nombres complexes z et z'. Dans le cas où $Z = zz'$, le module de Z est égal au produit des modules de z et de z'. Et l'argument de Z est égal à la somme des arguments de z et de z', modulo 2π.

Cela signifie que :

$\arg Z = \arg z + \arg z'\ [2\pi]$

$|Z| = |zz'| = |z| \times |z'|$

Dans le cas où $Z = \dfrac{z}{z'}$ $(z' \neq 0)$, le module de Z s'obtient en divisant le module de z par le module de z'. Et l'argument de Z est égal à la différence des arguments de z et de z', modulo 2π.
Cela signifie que :

$\arg Z = \arg z - \arg z'\ [2\pi]$

$|Z| = \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

MOTS CLÉS

NOMBRE COMPLEXE
• Un nombre complexe est un nombre de la forme $z = x + iy$, pour lequel x et y sont deux nombres réels, et i est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.
• L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

PARTIE RÉELLE, PARTIE IMAGINAIRE
Tout nombre complexe z admet une unique écriture algébrique $z = x + iy$:
• x s'appelle la partie réelle de z ; on la note $\mathrm{Re}(z)$.
• y s'appelle la partie imaginaire de z ; on la note $\mathrm{Im}(z)$.

IMAGINAIRE PUR
Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle. Par exemple, le nombre complexe $5i$ est imaginaire pur.

NOMBRE COMPLEXE CONJUGUÉ
• Le conjugué du nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.
• Un nombre complexe et son conjugué ont la même partie réelle et des parties imaginaires opposées.

MODULE
Le module du nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, est le réel positif noté $|z|$, défini par $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

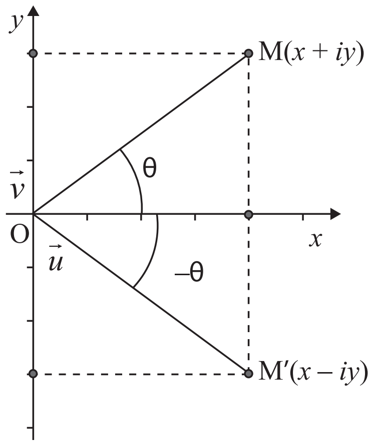
ARGUMENT
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, pour le nombre complexe $z \neq 0$ d'image M, on appelle argument de z ($\arg z$) toute mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.

MODULO 2Π
L'écriture « $[2\pi]$ » (modulo 2π) est synonyme de « à $2k\pi$ près pour une valeur entière de k ».

IDENTITÉ REMARQUABLE
Les identités remarquables sont également valables dans $\mathbb{C}$.
Pour deux nombres complexes a et b, on a :
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Qu'est-ce qu'un nombre complexe conjugué ?

Le nombre complexe conjugué de $z = x + iy$ est le complexe $\overline{z} = x - iy$. Dans le plan complexe, si le point M a pour affixe z et M′ pour affixe $\overline{z}$, alors M et M′ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Le produit d'un nombre complexe par son conjugué est un nombre réel égal au carré de leur module commun :

$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$.

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

Le **conjugué de la somme** est égal à la **somme des conjugués** :

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} = (x + x') - i(y + y')$.

Le **conjugué du produit** est égal au **produit des conjugués** :

$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} = (xx' - yy') - i(x'y + xy')$.

Comment résoudre une équation dans l'ensemble des nombres complexes ?

On rencontre essentiellement trois types d'équations dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

Dans le cas d'une **équation du premier degré** de la forme $az + b = c$, avec $a \neq 0$, les méthodes de résolution sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Dans le cas d'une **équation du second degré** à coefficients réels de la forme $az^2 + bz + c = 0$, où a est un réel non nul, on calcule le **discriminant** de l'équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une **racine double réelle** : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux **racines réelles :** $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux **racines complexes conjuguées** :

$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Dans le cas d'une équation faisant intervenir $\overline{z}$, le conjugué de z, ou son module $|z|$, on pose $z = x + iy$, puis on fait appel au théorème suivant : deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même **partie réelle** et même **partie imaginaire**.

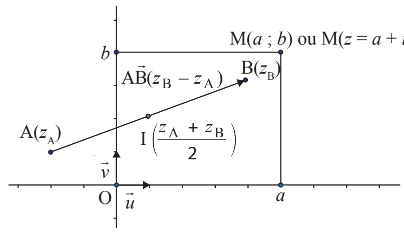
Quel lien y a-t-il entre la géométrie plane et les nombres complexes ?

Les nombres complexes constituent un outil privilégié pour résoudre de manière simple de nombreux problèmes de géométrie.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct, l'**image du nombre complexe $z = a + ib$** est le **point M de coordonnées (a, b)**. On dit alors que z est **l'affixe du point M**.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_B - z_A$.

L'affixe du milieu I du segment [AB] est la demi-somme des affixes des points A et B.



Il est impératif de connaître aussi :

- le lien entre les **distances** et les **modules** : $AB = |z_B - z_A|$;
- le lien entre les **angles** et les **arguments** : $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.

UN ARTICLE DU *MONDE* À CONSULTER

• **Kantorovitch, le planificateur révolutionnaire** p. 37
(Cédric Villani, *Le Monde Science et techno* daté du 22.09.2012)

MOTS CLÉS

FORME CANONIQUE

Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$), un trinôme du second degré dans $\mathbb{C}$.

$$P(z) = a\left[\left(z - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

est la forme canonique du trinôme.

DISCRIMINANT

Pour l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$, le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation.

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, les solutions de l'équation du second degré à coefficients réels $az^2 + bz + c = 0$ où $a \neq 0$ sont :

• Si $\Delta > 0$, deux racines réelles $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Si $\Delta = 0$, **une racine réelle double** $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

• Si $\Delta < 0$, **deux racines complexes conjuguées :**

$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

IMAGE

L'image du nombre complexe $z = x + iy$ est le point de coordonnées M $(x\,;y)$.

AFFIXE

• L'affixe du point M $(x\,;y)$ du plan complexe est le nombre complexe $z = x + iy$.

• L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_B - z_A$.

ZOOM SUR…

L'EXPRESSION CONJUGUÉE

• L'**expression conjuguée** du nombre complexe $a + ib$ (a et b deux réels) est $a - ib$.

• On a la relation $z\,\overline{z} = |z|^2$ pour tout nombre complexe z.

• On utilise l'**expression conjuguée** d'une expression pour rendre réel le dénominateur d'un nombre complexe écrit sous la forme d'une fraction :

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2 - i^2} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Pondichéry (avril 2013)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. On considère le point A d'affixe $Z_A = 1$ et le point B d'affixe $Z_B = i$. À tout point M d'affixe $Z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M′ d'affixe $Z_{M'} = -iZ_M$. On désigne par I le milieu du segment [AM]. Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM′ (propriété 1) et que BM′ = 2 OI (propriété 2).

1. Dans cette question, et uniquement dans cette question, on prend $Z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

a) Déterminer la forme algébrique de Z_M.

b) Montrer que $Z_{M'} = -\sqrt{3} - i$. Déterminer le module et un argument de $Z_{M'}$.

c) Placer les points A, B, M, M′ et I dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.

Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $Z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

b) Déterminer l'affixe du point M′ en fonction de x et y.

c) Écrire les coordonnées des points I, B et M′.

d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM′.

e) Montrer que BM′ = 2 OI.

La bonne méthode

1. *a)* On a $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

b) Déduire le premier résultat de la question **1. *a)***.

c) Calculer Z_I à l'aide de Z_A et de Z_M.

2. *a)* Calculer Z_I à l'aide de Z_A et de $Z_M = x + iy$.

b) Utiliser la définition de $Z_{M'}$.

c) Le nombre complexe $z = x + iy$ a pour coordonnées $(x\,;y)$.

d) Calculer $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BM'}$ pour conclure.

e) Comparer les quantités BM'^2 et $(2\,OI)^2$.

Asie (juin 2013)

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$a = 2 + 2i$; $b = -\sqrt{3} + i$; $c = 1 + i\sqrt{3}$; $d = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $e = -1 + (2 + \sqrt{3})i$.

1. Affirmation 1 : les points A, B et C sont alignés.

2. Affirmation 2 : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

La bonne méthode

1. Utiliser la colinéarité des vecteurs.

2. Calculer et comparer les valeurs BE^2, CE^2 et DE^2.

Polynésie (juin 2013)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\frac{z_1}{z_2}$ est :

a) $\sqrt{3}e^{i\frac{19\pi}{12}}$ ***b)*** $\sqrt{12}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ ***c)*** $\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ***d)*** $\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue complexe z, admet :

a) une solution ***b)*** deux solutions

c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.

d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

La bonne méthode

1. Pour deux nombres réels θ et θ', $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$. Penser à écrire i sous la forme exponentielle.

2. Poser $z = x + iy$ avec x et y deux nombres réels et se rappeler que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales, ainsi que leurs parties imaginaires.