Durée : 4 heures

Baccalauréat STI 2D/STL spécialité SPCL
Métropole 11 septembre 2014 Correction

EXERCICE 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. La forme exponentielle du nombre complexe $z_1 = \sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{6}$ est :

a. $\boxed{z_1 = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$ **b.** $\cancel{z_1 = 2\sqrt{6}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$ **c.** $\cancel{z_1 = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$ **d.** $\cancel{z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}}$

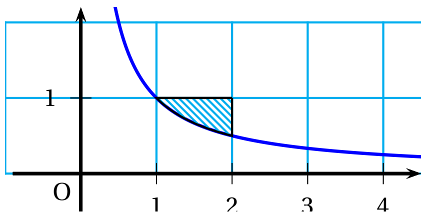
2. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{6}$ et $z_2 = -\sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{6}$.

Le nombre complexe z_2 est égal à :

a. $\cancel{\overline{z_1}}$ **b.** $\cancel{-z_1}$ **c.** $\boxed{-\overline{z_1}}$ **d.** $\cancel{\mathrm{i} + z_1}$

3. La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Sa courbe représentative est donnée ci-dessous :



Le domaine du plan défini comme l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ qui vérifient $1 \leqslant x \leqslant 2$ et $\dfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant 1$ a pour aire (exprimée en unité d'aire) :

a. $\cancel{\ln 2}$ **b.** $\cancel{\dfrac{1}{2}}$ **c.** $\boxed{1 - \ln 2}$ **d.** $\cancel{1 - \mathrm{e}^2}$.

4. La tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ à la courbe représentative de la fonction f, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, a pour équation :

a. $\boxed{y = -4x + 4}$ **b.** $\cancel{y = 4x + 4}$ **c.** $\cancel{y = -4x - 4}$ **d.** $\cancel{y = 4x - 4}$

EXERCICE 2 **5 points**

Une équipe aérospatiale se propose d'envoyer un satellite de 10 tonnes en orbite autour de la Terre par l'intermédiaire d'une fusée à un seul étage. Cette fusée a une masse à vide, c'est-à-dire sans carburant ni satellite, de 40 tonnes.

L'éjection des gaz permet à la fusée de décoller et de s'élever dans les airs jusqu'à la consommation totale du propergol, carburant contenu dans ses réservoirs. La vitesse d'éjection des gaz est $V_\mathrm{e} = 3200\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

La vitesse finale de la fusée, vitesse atteinte lorsque les réservoirs sont vides, varie en fonction de la masse de propergol contenue au départ dans les réservoirs. Elle doit être de $8000\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pour permettre la mise en orbite souhaitée.

Le but de l'exercice est de déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre cette mise en orbite du satellite.

On note x la masse, en tonnes, de propergol contenu au décollage dans les réservoirs de la fusée. La masse x est comprise entre 100 et 900 tonnes.

La masse totale de la fusée est alors $(x + 50)$ tonnes.

Il est établi que la vitesse finale de la fusée, $f(x)$, exprimée en $\mathrm{m} \cdot s^{-1}$, est donnée par

$$f(x) = V_\mathrm{e} \times [\ln(x + 50) - \ln 50]$$

où x est un réel de l'intervalle $[100\ ;\ 900]$.

1. Montrons que, pour tout réel x de l'intervalle $[100\,;\,900]$, $f(x) = 3\,200 \times \ln(0,02x+1)$.

   D'une part par hypothèse $V_{\text{e}} = 3\,200$, d'autre part $\ln(x+50) - \ln 50 = \ln \dfrac{x+50}{50} = \ln\left(\dfrac{1}{50}x+1\right) = \ln(0{,}02x+1)$.

   Nous avons bien $f(x) = 3\,200 \times \ln(0,02x+1)$.

   On pourra choisir l'une ou l'autre des expressions de $f(x)$ pour répondre à chacune des questions suivantes.

2. **a.** Si les réservoirs contiennent au décollage 100 tonnes de propergol, la vitesse finale de la fusée est donnée par $f(100)$. $f(100) = 3\,200 \times \ln(2+1) = 3\,200 \times \ln 3 \approx 3\,515{,}56$
   La vitesse finale de la fusée est d'environ $3\,516\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

   b. Avec 400 tonnes de propergol au décollage, la vitesse finale de la fusée est donnée par $f(400)$.
   $f(400) = 3\,200 \times \ln(0,02 \times 400 + 1) = 3\,200 \times \ln(9) = 6\,400 \times \ln 3 \approx 7\,031,12$.
   Avec 400 tonnes de propergol au décollage, la vitesse finale de la fusée est d'environ $7\,031\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
   Il en résulte que la mise en orbite n'est pas possible.

3. **a.** Calculons la fonction dérivée f' de la fonction f.
   En utilisant la première forme, $f'(x) = 3\,200 \times \dfrac{1}{x+50}$ car $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

   b. Déterminons le sens de variation de la fonction f.
   Étudions d'abord le signe de $f'(x)$. Pour tout $x \in [100\,;\,900]$, $f'(x) > 0$ comme produit et quotient de nombres réels strictement positifs.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I. La fonction f est par conséquent strictement croissante sur $[100\,;\,900]$.

4. Déterminons la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre la mise en orbite souhaitée. Pour cela, la vitesse finale doit être de $8\,000\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
   Résolvons alors $f(x) = 8\,000$.

$$\begin{aligned} 3\,200 \times \ln(0,02x+1) &= 8\,000 \\ \ln(0,02x+1) &= 2,5 \\ 0,02x+1 &= \text{e}^{2,5} \\ 0,02x &= \text{e}^{2,5} - 1 \end{aligned}$$

   $x = 50(\text{e}^{2,5} - 1) \approx 559,125$.

   Pour permettre la mise en orbite souhaitée, la masse de propergol à mettre au départ doit être d'environ 560 tonnes.

EXERCICE 3 **7 points**

Chloé, âgée de 15 ans au 1er janvier 2014, réside dans une agglomération française.
Pour anticiper le financement de son permis de conduire, elle décide de placer sur un produit d'épargne ses 600 euros d'économies à partir du 1er janvier 2014.

Information 1 : conditions de souscription du livret jeune

- Montant maximum de placement : 1 600 euros
- Taux d'intérêt annuel de 2,75 %
- Avoir entre 12 et 25 ans
- Résider en France
- Montant minimum à l'ouverture : 10 euros

Information 2 : coût moyen du permis de conduire

La loi impose un minimum de 20 heures de conduite avant de se présenter au permis.
Une enquête de la CLCV (Consommation, Logement et Cadre de Vie) publiée en août 2013 et menée auprès de 447 auto-écoles souligne que ce forfait de 20 heures est facturé du simple au double selon les régions.
Par ailleurs, même si le minimum imposé par la loi est de vingt heures de conduite, il en faut plutôt trente en moyenne.
Ainsi, en comptant les frais de dossier, il est préférable de prévoir un budget de 1 500 euros.

Partie A

1. Chloé remplit les conditions permettant de souscrire au livret jeune.

   Son âge est bien compris entre 12 et 25 ans

   Elle réside en France.

   Son placement est supérieur à 10 euros

2. Elle n'aura pas une somme suffisante disponible au 1er janvier 2017 pour passer son permis si elle choisit de souscrire au livret jeune. Le placement, chaque année est multiplié par 1,0275 coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2,75 %.

   Au 1er janvier 2017, Chloé disposera de 650,87 euros ($600 \times 1{,}0275^3 = 650{,}87$).

Partie B

Chloé aura besoin de 1 500 euros pour financer son permis. Ses parents lui conseillent de verser chaque mois sur le livret la somme supplémentaire de 25 euros, à partir du 1er février 2014. Ils lui expliquent que le taux annuel du livret jeune correspond à un taux mensuel de 0,226 %.

1. Ses parents lui présentent un extrait d'une page de tableur qui simule l'évolution d'épargne :

	A	B
1	01/01/2014	600,00 €
2	01/02/2014	626,36 €
3	01/03/2014	652,77 €
4	01/04/2014	679,25 €
5	01/05/2014	705,78 €
6	01/06/2014	732,38 €
7	...	...

   a. Justifions la formule à écrire en B2.

   À un taux d'augmentation de 0,226 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,002 26. Chaque mois la somme précédente (ici B1) est multipliée par ce coefficient multiplicateur et comme elle ajoute chaque mois 25 euros, la formule à saisir dans la cellule B2 est : $\boxed{= 1{,}00226 \times \text{B}1 + 25}$.

   b. Déterminons la somme qui serait disponible sur le livret au 1er juillet 2014.

   $732{,}38 \times 1{,}00226 \approx 759{,}04$. Au 1erjuillet 2014, elle disposerait de 759,04 euros.

2. Chloé veut déterminer au bout de combien de mois elle aurait l'argent nécessaire pour financer son permis en suivant le conseil de ses parents.

   Elle décide de noter u_n la somme, en euros, disponible le n-ième mois après l'ouverture du livret. Ainsi, u_0 vaut 600 euros.

   a. Exprimons u_{n+1} en fonction de u_n. Nous avons justifié, lors de l'écriture de la formule, le passage d'un terme au suivant par conséquent

   $u_{n+1} = 1{,}00226 u_n + 25$.

   b. Chloé décide d'écrire l'algorithme suivant :

```
Variables
   n : un nombre entier naturel
   u : un nombre réel
Initialisation
   Affecter à n la valeur 0
   Affecter à u la valeur 600
Traitement
   Tant que ......
      Affecter à n la valeur n + 1
      Affecter à u la valeur ......
   Fin Tant que
Sortie
   Afficher ...
```

   Complétons l'algorithme.

   - Tant que u < 1 500.
   - Affecter à u la valeur $1{,}00226 * u + 25$. *Il est préférable d'éviter les multiplications implicites*
   - Afficher u.

   c. Au bout de 33 mois Chloé aura l'argent nécessaire pour financer son permis si elle suit les conseils de ses parents.

EXERCICE 4 **4 points**

Une entreprise de transport dispose d'un nombre important de camions. On admet que la distance quotidienne parcourue par chaque camion, exprimée en kilomètres, peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 500 et d'écart type 40.

1. La distance moyenne parcourue en un jour par un camion est de 500 km.

   Pour une loi normale, la moyenne est égale à l'espérance.

2. Déterminons la probabilité qu'un camion parcoure au moins 500 km en un jour. $P(X > 500) = 1 - P(X \leqslant 500) = 0,5$.

3. Déterminons la probabilité qu'un camion parcoure entre 380 km et 460 km en un jour. $P(380 \leqslant X \leqslant 460) = 0,1573$.

4. Déterminons la probabilité qu'un camion parcoure plus de 460 km en un jour.

   $P(X > 460) = 1 - P(X \leqslant 460) = 0,8414$.

5. Le directeur de l'entreprise affirme qu'environ 95 % de ses camions parcourent entre 460 et 540 km par jour. Le directeur a tort car $460 = \mu - \sigma$, $\quad 540 = \mu + \sigma$ et $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$.