

Durée : 3 heures

∞ **Baccalauréat ES/L Métropole–La Réunion 22 juin 2018** ∞

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le temps passé par un client, en minute, dans un supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart-type $\sigma = 12$.

Pour tout évènement E , on note $p(E)$ sa probabilité.

1. Déterminer, en justifiant :
 - a. $p(X = 10)$
 - b. $p(X \geq 45)$
 - c. $p(21 \leq X \leq 69)$
 - d. $p(21 \leq X \leq 45)$
2. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'un client passe entre 30 et 60 minutes dans ce supermarché.
3. Déterminer la valeur de a , arrondie à l'unité, telle que $P(X \leq a) = 0,30$. Interpréter la valeur de a dans le contexte de l'énoncé.

Partie B

En 2013, une étude a montré que 89 % des clients étaient satisfaits des produits de ce supermarché.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de clients satisfaits pour un échantillon de 300 clients pris au hasard en 2013.

Lors d'une enquête réalisée en 2018 auprès de 300 clients choisis au hasard, 286 ont déclaré être satisfaits.

2. Calculer la fréquence de clients satisfaits dans l'enquête réalisée en 2018.
3. Peut-on affirmer, au seuil de 95 %, que le taux de satisfaction des clients est resté stable entre 2013 et 2018? Justifier.

Exercice 2

4 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Reporter sur la copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est demandée.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

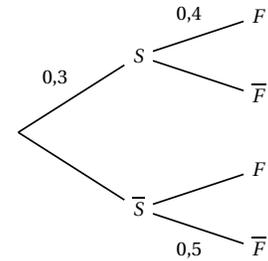
Dans un établissement scolaire, 30 % des élèves sont inscrits dans un club de sport, et parmi eux, 40 % sont des filles. Parmi ceux n'étant pas inscrits dans un club de sport, 50 % sont des garçons.

Pour tout événement E , on note \bar{E} l'évènement contraire de E et $p(E)$ sa probabilité. Pour tout événement F de probabilité non nulle, on note $P_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

On interroge un élève au hasard et on considère les événements suivants :

- S : « l'élève est inscrit dans un club de sport »
- F : « l'élève est une fille »

La situation est représentée par l'arbre pondéré ci-contre.



1. La probabilité $p_{\bar{F}}(S)$ est la probabilité que l'élève soit :
 - a. inscrit dans un club de sport sachant que c'est un garçon;
 - b. un garçon inscrit dans un club de sport;
 - c. inscrit dans un club de sport ou un garçon;
 - d. un garçon sachant qu'il est inscrit dans un club de sport.
2. On admet que $P(F) = 0,47$. La valeur arrondie de $P_F(S)$ est :

a. 0,141	b. 0,255	c. 0,400	d. 0,638
----------	----------	----------	----------

Partie B

Soit g la fonction définie sur $[-1 ; 4]$ par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ et \mathcal{C}_g sa courbe représentative dans un repère.

1. La tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point d'abscisse 1 a pour équation :

a. $y = -3x^2 + 6x$	b. $y = 3x - 2$	c. $y = 3x - 3$	d. $y = 2x - 1$
---------------------	-----------------	-----------------	-----------------
2. La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[-1 ; a]$ est nulle pour :

a. $a = 0$	b. $a = 1$	c. $a = 2$	d. $a = 3$
------------	------------	------------	------------

Exercice 3**5 points****Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L**

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m.

On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi.

Le 1^{er} janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de 6,05 m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante :

- d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière) ;
 - ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).
1. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac à midi, en cm, n jours après le 1^{er} janvier 2018.
Ainsi le niveau d'eau du lac, en cm, le 1^{er} janvier 2018 est donné par $u_0 = 605$.
 - a. Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi.
 - b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,06u_n - 15$.
 2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

- a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,06.
Préciser son terme initial.
- b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 355 \times 1,06^n + 250$.
3. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.
 - a. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
 - b. L'équipe d'entretien devra-t-elle ouvrir les vannes afin de réguler le niveau d'eau? Justifier la réponse.
4. Afin de déterminer la première date d'intervention des techniciens, on souhaite utiliser l'algorithme incomplet ci-dessous.

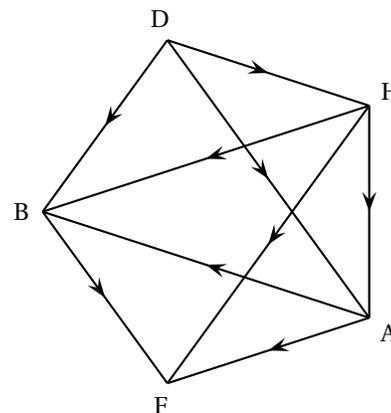
```

N ← 0
U ← 605
Tant que ..... faire
    U ← .....
    N ← N + 1
Fin Tant que
  
```

- a. Recopier et compléter l'algorithme.
- b. À la fin de l'exécution de l'algorithme, que contient la variable N ?
- c. En déduire la première date d'intervention des techniciens sur les vannes du barrage.

Exercice 3**5 points****Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité****Partie A**

Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux, de haies et d'anneaux. Le graphe orienté ci-contre indique les différents parcours conseillés partant de D et terminant à F.



Les sommets sont : D (départ), B (banc pour abdominaux), H (haies), A (anneaux) et F (fin du parcours).

Les arêtes représentent les différents sentiers reliant les sommets.

1. Quel est l'ordre du graphe?
2. On note M la matrice d'adjacence de ce graphe où les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique.
 - a. Déterminer M .

b. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

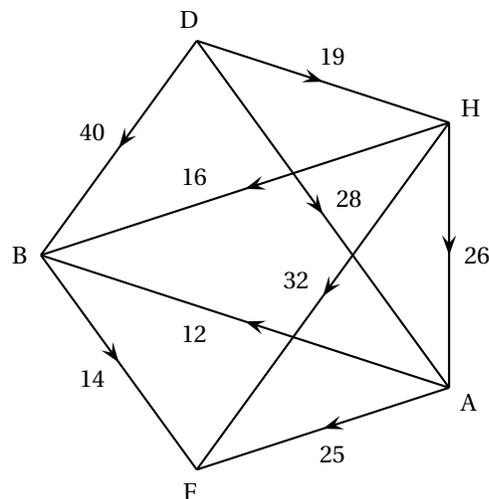
Assia souhaite aller de D à F en faisant un parcours constitué de 3 arêtes.

Est-ce possible? Si oui, combien de parcours différents pourra-t-elle emprunter?

Préciser ces trajets.

3. Assia a relevé ses temps de course en minute entre les différents sommets. Ces durées sont portées sur le graphe ci-dessous.

Lors d'un entraînement, Assia souhaite courir le moins longtemps possible en allant de D à F. Déterminer le trajet pour lequel le temps de course est minimal et préciser la durée de sa course.



Partie B

Le responsable souhaite ajouter une barre de traction notée T. De nouveaux sentiers sont construits et de nouveaux parcours sont possibles.

La matrice d'adjacence N associée au graphe représentant les nouveaux parcours, dans lequel les sommets sont classés en ordre alphabétique, est

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Compléter l'annexe 1 à rendre avec la copie, en ajoutant les arêtes nécessaires au graphe orienté correspondant à la matrice N .

Exercice 4
Commun à tous les candidats**6 points**

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ par

$$f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3.$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans une repère. Une représentation graphique est donnée en annexe.

1. On note f' la fonction dérivée de f . Montrer que, pour tout $x \in [-2 ; 4]$,

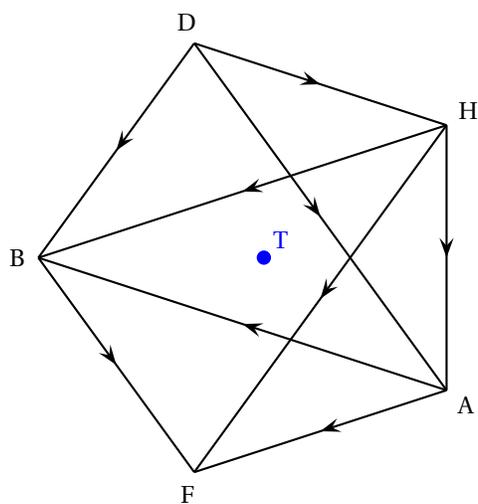
$$f'(x) = -4xe^{-2x}.$$

2. Étudier les variations de f .
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-2 ; 0]$ et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.
4. On note f'' la fonction dérivée de f' . On admet que, pour tout $x \in [-2 ; 4]$,

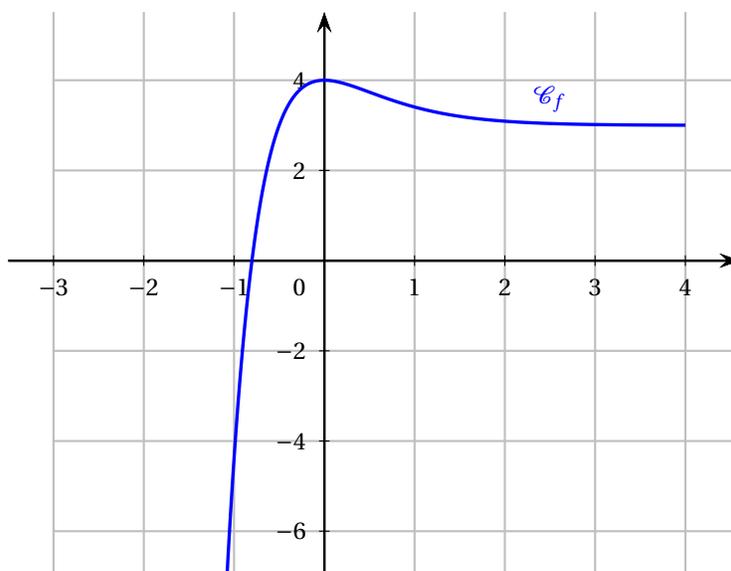
$$f''(x) = (8x - 4)e^{-2x}.$$

- a. Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.
- b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.
5. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ par $g(x) = (2x + 1)e^{-2x}$.
- a. Vérifier que la fonction G définie pour tout $x \in [-2 ; 4]$ par $G(x) = (-x - 1)e^{-2x}$ est une primitive de la fonction g .
- b. En déduire une primitive F de f .
6. On note \mathcal{A} l'aire du domaine \mathcal{D} compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
- a. Hachurer le domaine \mathcal{D} sur le graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.
- b. Par lecture graphique, donner un encadrement de \mathcal{A} , en unité d'aire, par deux entiers consécutifs.
- c. Calculer la valeur exacte de \mathcal{A} , puis une valeur approchée au centième.

Annexe 1
Exercice 3 - Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité



Annexe 2
Exercice 4 - Commun à tous les candidats



Durée : 3 heures

∞ Corrigé du baccalauréat ES/L Métropole–La Réunion ∞
21 juin 2018

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

La variable X suit la loi normale de paramètres $\mu = 45$ et $\sigma = 12$.

1. a. $P(X = 10) = 0$ car X suit une loi à densité, donc la probabilité (calculée avec une intégrale) que la variable X soit égale à une n'importe quelle valeur choisie, est toujours égale à zéro.
 - b. L'espérance de la loi normale est $\mu = 45$. La fonction de densité d'une telle loi est symétrique par rapport à un axe vertical d'équation $x = 45$. Donc $P(X \leq 45) = P(X \geq 45) = 0,5$.
 - c. $\mu = 45$ et $\sigma = 12$ donc $\mu - 2\sigma = 21$ et $\mu + 2\sigma = 69$.
Donc $P(21 \leq X \leq 69) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,955$
 - d. En utilisant toujours la symétrie de la fonction de densité, on a donc :
$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 2 \times P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu) = \frac{0,955}{2} = 0,475.$$
2. À l'aide de la calculatrice, $P(30 \leq X \leq 60) \approx 0,789$.
 3. À l'aide de la calculatrice (inversion de la loi normale), $P(X \leq a) = 0,30 \iff a \approx 38,71$ soit environ 39 minutes. Donc la probabilité qu'un client passe moins de 39 minutes est égale à 0,30.

Partie B

1. On prend un échantillon de taille 300 donc $n = 300$. Une étude a montré que 89% des clients sont satisfaits donc la probabilité est $p = 0,89$.
 $n = 300 \geq 30$, $np = 267 \geq 5$ et $n(1-p) = 33 \geq 5$ donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% :
$$I_{300} = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$
$$= \left[0,89 - 1,96\sqrt{\frac{0,89 \times 0,11}{300}}; 0,89 + 1,96\sqrt{\frac{0,89 \times 0,11}{300}} \right] \approx [0,855; 0,925]$$
2. La fréquence de clients satisfaits est : $f = \frac{286}{300} \approx 0,953$
3. Si on suppose que le taux de satisfaction reste stable à que 89%, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% reste identique. Or $f \notin I_{300}$ donc au risque d'erreur de 5%, donc on ne peut pas dire que le taux de satisfaction est resté stable.

Exercice 2

4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. La probabilité $p_{\bar{F}}(S)$ est la probabilité que l'on interroge un élève faisant du sport sachant que cet élève n'est pas une fille (et donc est un garçon). **Réponse a)**
2. Formule de Bayes : $P_F(S) = \frac{P(F \cap S)}{P(F)} = \frac{P_S(F) \times P(S)}{P(F)} = \frac{0,3 \times 0,4}{0,47} \approx 0,255$. **Réponse b)**

Partie B

1. L'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point d'abscisse $a = 1$ est : $y = g'(a)(x - a) + g(a)$.
La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[-1; 4]$: $g'(x) = -3x^2 + 6x$.
Donc $g'(1) = 3$ et $g(1) = 1$. L'équation de la tangente est : $y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$. **Réponse b)**
2. Avec la calculatrice, on calcule la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[-1; a]$ ($a \geq -1$) : $\frac{1}{a - (-1)} \int_{-1}^a g(x) dx$.
- Pour $a = 0$: $\frac{1}{0 - (-1)} \int_{-1}^0 g(x) dx = \int_{-1}^0 g(x) dx = \frac{1}{4}$.
- Pour $a = 1$: $\frac{1}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 g(x) dx = 0$. **Réponse b)**

Exercice 3**5 points****Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L**

1. Le niveau augmente en hauteur de 6 % puis baisse de 15 cm d'un jour à l'autre. Augmenter de 6 % revient à multiplier par 1,06.
- a. Le 2 janvier 2018, $u_1 = 1,06 \times u_0 - 15 = 1,06 \times 605 - 15 = 626,3$.
- b. Pour tout entier naturel n , on note respectivement par u_n et u_{n+1} les niveaux du barrage pour les jours n et $n + 1$. Le niveau augmente de 6 % puis baisse de 15, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,06 \times u_n - 15$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$
- a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 1,06u_n - 15 - 250 = 1,06u_n - 265 = 1,06 \times \left(u_n - \frac{265}{1,06}\right) = 1,06 \times (u_n - 250) = 1,06 \times v_n$.
Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme $v_0 = u_0 - 250 = 355$.
- b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 355 \times 1,06^n$. De plus $u_n = v_n + 250$
donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 355 \times 1,06^n + 250$.
3. a. Cherchons la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini.
La raison de la suite géométrique (v_n) est supérieure à 1 et $v_0 > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 250$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- b. L'équipe d'entretien devra impérativement intervenir car à un moment donné (jour N) $u_N \geq 1000$.
4. a. Ci-dessous l'algorithme complété :

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 605$
Tant que $U < 1000$ faire
$U \leftarrow 1,06 \times U - 15$
$N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que

- b. À l'aide de la calculatrice, $a_{12} \approx 964,33$ et $a_{13} \approx 1007,19$. A la fin de l'exécution, la variable N contient la valeur 13.

Par le calcul :

$$u_n \geq 1000 \iff 355 \times 1,06^n + 250 \geq 1000 \iff 355 \times 1,06^n \geq 750 \iff 1,06^n \geq \frac{750}{355}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1,06^n) \geq \ln\left(\frac{150}{71}\right) \Leftrightarrow n \times \ln(1,06) \geq \ln\left(\frac{150}{71}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{150}{71}\right)}{\ln(1,06)}$$

Or $\frac{\ln\left(\frac{150}{71}\right)}{\ln(1,06)} \approx 12,84$ donc $n \geq 13$. On retrouve le résultat précédent.

- c. L'intervention devra donc intervenir 13 jours après le 1^{er} janvier 2018, soit donc le 14 janvier 2018.

Exercice 3

5 points

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. L'ordre de ce graphe est 5 car il possède 5 sommets.

2. a. La matrice d'adjacence de ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- b. Pour trouver le nombre de chemin de longueur 3 allant de D à F, il faut lire le coefficient $a_{3,4}$ de la matrice $M^3 = (a_{i,j})$: ici c'est 3. Il existe donc trois parcours.
Ce sont : $D \rightarrow H \rightarrow A \rightarrow F$; $D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F$ et $D \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow F$.

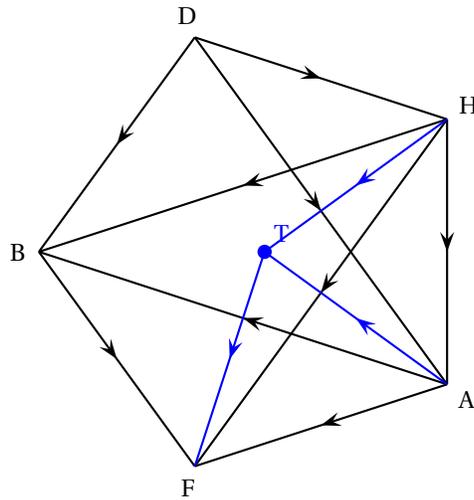
3. En utilisant l'algorithme de Dijkstra :

A	B	D	F	H	Sommet Choisi
28 (D)	40 (D)	0	$+\infty$	19 (D)	H (19)
45 (H)	35 (H)		51 (H)		A (28)
28 (D)	40 (D)				
	68 (D)		51 (H)		B (35)
	35 (H)				
			49 (B)		F (49)
			51 (H)		

Le chemin le plus court sera : $D \xrightarrow{19} H \xrightarrow{16} B \xrightarrow{14} F$ et aura pour longueur 49.

Partie B

Le graphe complété des 3 nouveaux chemins :



Exercice 4

4 points

Commun à tous les candidats

1. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-2; 4]$.
 Pour tout $x \in [0; 5]$, $f(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x) + 3$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = e^{-2x}$.
 En écrivant $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -2e^{-0,2x}$,
 $f'(x) = 2 \times e^{-2x} + (2x + 1) \times -2e^{-x} = e^{-2x} (2 + (2x + 1) \times -2) = e^{-2x} (2 - 4x - 2) = e^{-2x} (-4x)$
2. $\forall x \in [-2; 4], e^{-2x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-4x$.
 Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 4]$ est :

x	-2	0	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-3e^4 + 3$	4	$9e^{-8} + 3$

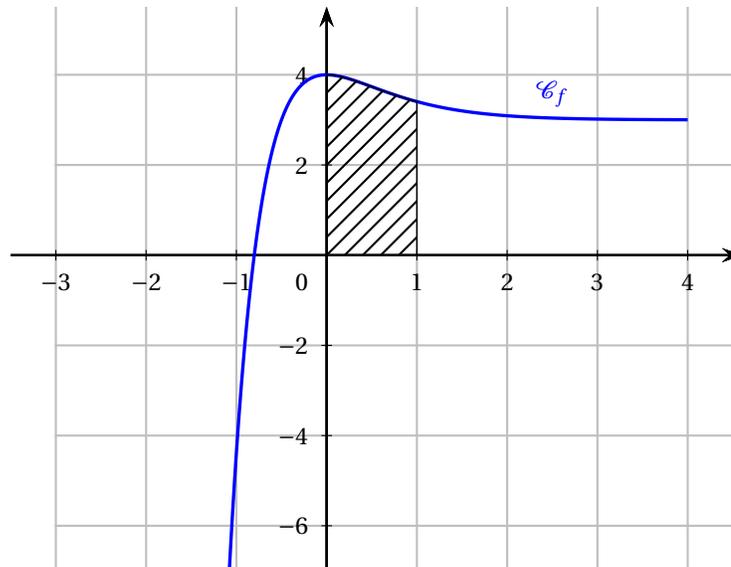
$$f(-2) = (2 \times -2 + 1)e^{-2 \times -2} + 3 = -3e^4 + 3 \approx -160,8 \qquad f(0) = (2 \times 0,6 + 1)e^0 + 3 = 4$$

$$f(4) = (2 \times 4)e^{-2 \times 4} + 3 = 9e^{-8} + 3 \approx 3$$

3. Sur l'intervalle $[-2; 0]$, la fonction f est continue et strictement croissante.
 De plus $0 \in [-3e^4 + 3; 4]$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[-2; 0]$. À l'aide de la calculatrice, $\alpha \approx -0,8$.
 Sur l'intervalle $[0; 4]$, la fonction f est strictement décroissante donc $f(x) \geq f(4)$. Or $f(4) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
 Pour conclure, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique $\alpha \approx -0,8$ sur l'intervalle $[-2; 4]$.
4. a. $\forall x \in [-2; 4], e^{-2x} > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $8x - 4$.
 $8x - 4 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$. Le tableau suivant donne le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[-2; 4]$:

x	-2	$\frac{1}{2}$	4
$f''(x)$	-	0	+

- b. D'après le tableau de signe précédent, f est convexe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$.
5. a. On admet que la fonction G est dérivable sur l'intervalle $[-2; 4]$.
 $\forall x \in [-2; 4]$, $G(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = -x - 1$ et $v(x) = e^{-2x}$.
 En écrivant $u'(x) = -1$ et $v'(x) = -2e^{-0,2x}$,
 $G'(x) = -1 \times e^{-2x} + (-x - 1) \times -2e^{-x} = e^{-2x}(-1 + (-x - 1) \times -2) = e^{-2x}(-1 + 2x + 2)$
 $G'(x) = e^{-2x}(2x + 1)$.
 Donc la fonction G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[-2; 4]$.
- b. Une primitive de f sur l'intervalle $[-2; 4]$ est : $F(x) = G(x) + 3x = (-x - 1)e^{-2x} + 3x$.
6. a. Sur le dessin ci-dessous est hachuré \mathcal{A} l'aire du domaine \mathcal{D} compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.



- b. Par lecture graphique, dans la limite de sa précision : $3 \leq \mathcal{A} \leq 4$
- c. $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0)$.
 $F(1) = (-1 - 1)e^{-2} + 3 = -2e^{-2} + 3$ et $F(0) = -e^0 = -1$
 donc $\mathcal{A} = -2e^{-2} + 3 + 1 = 4 - 2e^{-2} \approx 3,73$