∽ Baccalauréat ES Métropole ∾ 21 juin 2017

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième près.

1. Un supermarché dispose de plusieurs caisses. Un client qui se présente à une caisse doit attendre un certain temps T_1 avant d'être pris en charge par le caissier. On considère que ce temps d'attente T_1 exprimé en minute, est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,12]$.

   a. Quelle est la probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes avant d'être pris en charge ?

   b. Quel est le temps moyen d'attente à une caisse ?

2. Le gérant du magasin décide de mettre à disposition des clients des caisses automatiques, de façon à réduire le temps d'attente pour les clients ayant un panier contenant peu d'articles.

   Le temps d'attente T_2, exprimé en minute, à chacune de ces caisses automatiques est modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart type $1,5$.

   Calculer la probabilité que le temps d'attente à une caisse automatique soit compris entre $0,75$ minute et 6 minutes.

3. Ces caisses automatiques tombent souvent en panne. On donne les informations suivantes.
   - Le nombre de caisses automatiques est $n = 10$.
   - La probabilité qu'une caisse automatique tombe en panne pendant une journée donnée est $p = 0,1$.
   - Une panne constatée sur une caisse automatique n'influence pas les autres caisses automatiques.

   Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de caisses automatiques qui tombent en panne pendant une journée donnée.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

   b. Calculer la probabilité pour qu'aucune caisse automatique ne tombe en panne pendant une journée donnée.

4. Sur la devanture de son magasin, le gérant du supermarché affiche :

   « Plus de 90 % des clients de notre magasin sont satisfaits par la mise en place de nos caisses automatiques. »

   Une association de consommateurs souhaite examiner cette affirmation. Pour cela, elle réalise un sondage : 860 clients sont interrogés, et 763 d'entre eux se disent satisfaits par la mise en place de ces caisses automatiques.

   Cela remet-il en question l'affirmation du gérant ?

Exercice 2 **5 points**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Au 1er janvier 2017, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois :

- 25 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

PARTIE A

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que
$u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 12.$$

Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois.

1. Déterminer une estimation du nombre d'adhérents au 1er mars 2017.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 48$ pour tout entier naturel n.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
   b. Préciser v_0 et exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 852 \times 0,75^n + 48.$$

3. La présidente de l'association déclare qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérents devient inférieur à 100. Si on fait l'hypothèse que l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit de la même façon, faudra-t-il que la présidente démissionne ?
   Si oui, au bout de combien de mois ?

Partie B

Chaque adhérent verse une cotisation de 10 euros par mois. Le trésorier de l'association souhaite prévoir le montant total des cotisations pour l'année 2017.
Le trésorier souhaite utiliser l'algorithme suivant dans lequel la septième et la dernière ligne sont restées incomplètes (pointillés).

1. Recopier et compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le montant total des cotisations de l'année 2017.

Variables	S est un nombre réel N est un entier U est un nombre réel
Initialisation	S prend la valeur 0 U prend la valeur 900
	Pour N allant de 1 à 12 : Affecter à S la valeur ... Affecter à U la valeur $0,75U + 12$ Fin Pour
Sortie	...

2. Quelle est la somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2017 ?

Exercice 2 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Dans un jeu vidéo, une suite d'énigmes est proposée au joueur. Ces énigmes sont classées en deux catégories : les énigmes de catégorie A sont les énigmes faciles; les énigmes de catégorie B sont les énigmes difficiles.
Le choix des énigmes successives est aléatoire et vérifie les conditions suivantes :

- la première énigme est facile;
- si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est égale à 0,15;
- si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit facile est égale à 0,1.

Pour $n \geqslant 1$, on note :

- a_n la probabilité que l'énigme numéro n soit facile (de catégorie A);
- b_n la probabilité que l'énigme numéro n soit difficile (de catégorie B);
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste pour l'énigme numéro n.

1. Donner la matrice P_1.

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

3. Écrire la matrice M associée à ce graphe, puis donner la matrice ligne P_2.

4. Sachant que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_n + b_n = 1$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant l$, on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 0,1.$$

5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = a_n - 0,4$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

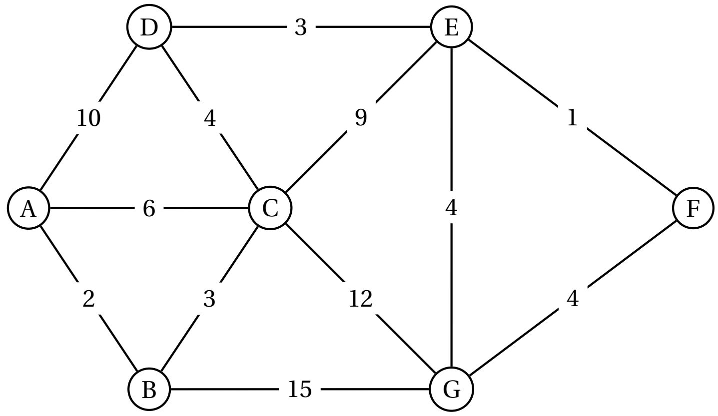
$$a_n = 0,8 \times 0,75^n + 0,4.$$

c. Préciser la limite de la suite (v_n).

d. Une revue spécialisée dans les jeux vidéo indique que plus le joueur évolue dans le jeu, plus il risque d'avoir à résoudre des énigmes difficiles. Que penser de cette analyse?

Partie B

Une des énigmes consiste à réaliser un parcours en un minimum de temps. Le graphe suivant schématise le parcours. L'étiquette de chaque arête indique le temps de parcours en minute entre les deux sommets qu'elle relie. Par exemple, le temps de parcours de C vers D, ou de D à C, est égal à quatre minutes.



Quel chemin le joueur doit-il prendre pour aller de A à G en minimisant son temps de parcours ? Expliquer la démarche utilisée.

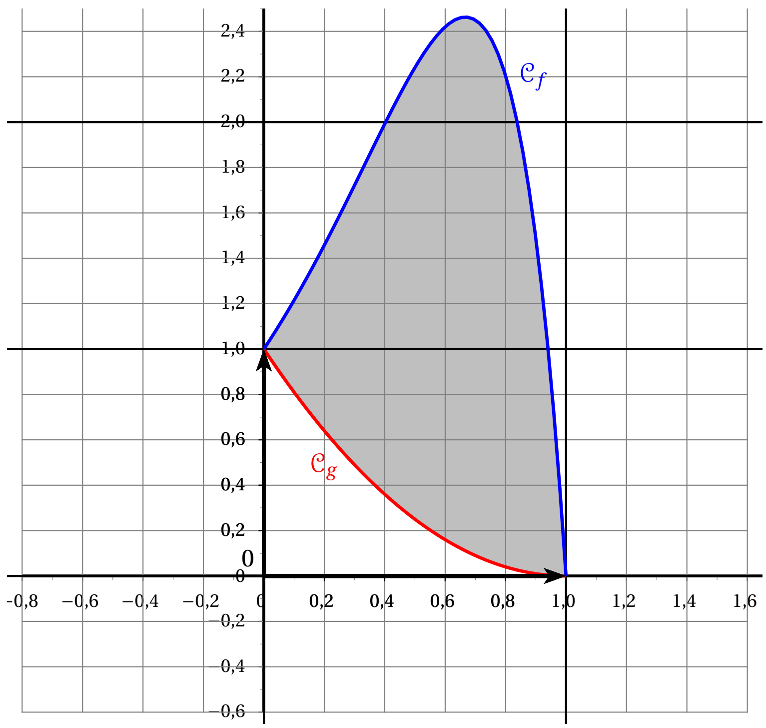
Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies par :
pour tout réel x de $[0~;~1]$,

$$f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{3x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2x + 1.$$

Leurs courbes représentatives seront notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

dériver $(1-x)*\exp(3x)$

: $-3x*\exp(3*x)+2*\exp(3*x)$

factoriser $-3x*\exp(3*x)+2*\exp(3*x)$

: $\exp(3x)*(-3x+2)$

factoriser(dériver($\exp(3x)(-3x+2)$))

: $3*\exp(3*x)(1-3x)$

Lecture : la dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = -3x\mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{3x}$, ce qui, après factorisation, donne $f'(x) = (-3x+2)\mathrm{e}^{3x}$.

1. Étudier sur $[0~;~1]$ le signe de la fonction dérivée f', puis donner le tableau de variation de f sur $[0~;~1]$ en précisant les valeurs utiles.
2. La courbe $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

Partie B

On se propose de calculer l'aire de la partie grisée sur le graphique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1~;~0)$ et $(0~;~1)$ sont des points communs aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. On admet que : pour tout x dans $[0~;~1]$, $f(x) - g(x) = (1-x)\left(\mathrm{e}^{3x} - 1 + x\right)$.
   a. Justifier que pour tout x dans $[0~;~1]$, $\mathrm{e}^{3x} - 1 \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout x dans $[0~;~1]$, $\mathrm{e}^{3x} - 1 + x \geqslant 0$.
   c. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans $[0~;~1]$.
3. **a.** Calculer $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. On admet que :
   $$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3 - 4}{9}.$$
   Calculer l'aire S, en unité d'aire, de la partie grisée. Arrondir le résultat au dixième.

Exercice 4 **3 points**

Dans cet exercice, on considère le premier chiffre des entiers naturels non nuls, en écriture décimale. Par exemple, le premier chiffre de 2 017 est 2 et le premier chiffre de 95 est 9.
Dans certaines circonstances, le premier chiffre d'un nombre aléatoire non nul peut être modélisé par une variable aléatoire X telle que pour tout entier c compris entre 1 et 9,

$$P(X = c) = \frac{\ln(c+1) - \ln(c)}{\ln(10)}.$$

Cette loi est appelée loi de Benford.

1. Que vaut $P(X = 1)$?
2. On souhaite examiner si la loi de Benford est un modèle valide dans deux cas particuliers.
   a. Premier cas
   Un fichier statistique de l'INSEE indique la population des communes en France au 1er janvier 2016 (champ : France métropolitaine et départements d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de la Réunion).
   À partir de ce fichier, on constate qu'il y a 36 677 communes habitées. Parmi elles, il y a 11 094 communes dont la population est un nombre qui commence par le chiffre 1.
   Cette observation vous semble-t-elle compatible avec l'affirmation : « le premier chiffre de la population des communes en France au 1 er janvier 2016 suit la loi de Benford » ?
   b. Deuxième cas
   Pour chaque candidat au baccalauréat de la session 2017, on considère sa taille en centimètres.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au premier chiffre de la taille en centimètres d'un candidat pris au hasard.
   La loi de Benford vous semble-t-elle une loi adaptée pour X ?

∽ Corrigé du baccalauréat ES Métropole 16 juin 2017 ∾

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats

1. **a.** La variableT_1 suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 12]$.

   Donc $P(T_1 \geqslant 5) = P(5 \leqslant T_1 \leqslant 12) = \dfrac{12-5}{12-0} = \dfrac{7}{12}$.

   b. Le temps moyen se calcule avec l'espérance.

   L'espérance d'une loi uniforme sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ est égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

   Donc $E(T_1) = \dfrac{0+12}{2} = 6$ (minutes).

2. La variable T_2 suit la loi normale de paramètres : $\mu = 5$ et $\sigma = 1{,}5$.

   $P(0{,}75 \leqslant T_2 \leqslant 6) \approx 0{,}745$ (avec la calculatrice).

3. **a.** On est dans le cas d'un répétition dans les mêmes conditions de 10 expériences qui n'ont que deus issues, donc la variable X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et de probabilité $p = 0{,}1$.

   b. $P(X=0) = \dbinom{10}{0} \times 0{,}1^0 \times 0{,}9^{10} = 0{,}9^{10} \approx 0{,}349$.

4. Cherchons l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

   La fréquence théorique de clients satisfaits est $p = 0{,}9$ et l'échantillon est de taille $n = 860$.

   On a $n \geqslant 30$, $np = 774 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 86 \geqslant 5$; on peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

   Or $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}879$ et $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}921$.

   Finalement $I_{860} \approx [0{,}879\ ;\ 0{,}921]$.

   Calculons la fréquence de satisfaction : $f = \dfrac{763}{860} \approx 0{,}887$.

   $f \in I_{860}$ donc on ne peut pas raisonnablement mettre en doute les affirmations de ce gérant.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Partie A

1. Calculons u_1 (nombre d'adhérents au 1^er^ février) et u_2 (nombre d'adhérents au 1^er^ mars).

   $u_1 = 0{,}75 \times 900 + 12 = 687$ et $u_2 = 0{,}75 \times 687 + 12 = 527{,}25$, soit environ 527 adhérents au 1^er^ mars 2017.

2. **a.** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 48$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 48 = 0{,}75u_n + 12 - 48 = 0{,}75u_n - 36\\ &= 0{,}75 \times \left(u_n - \frac{36}{0{,}75}\right) = 0{,}75 \times (u_n - 48) = 0{,}75 \times v_n.\end{aligned}$$

   La relation $v_{n+1} = 0{,}75 \times v_n$, vraie pour tout entier naturel n, montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

b. $v_0 = u_0 - 48 = 852$.

Donc pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 852 \times 0{,}75^n$.

c. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = u_n - 48$ donc $u_n = v_n + 48$.

Donc $u_n = 852 \times 0{,}75^n + 48$.

d. On cherche le premier entier naturel n tel que $u_n \leqslant 100$.

$u_n \leqslant 100 \iff 852 \times 0{,}75^n + 48 \leqslant 100 \iff 852 \times 0{,}75^n \leqslant 100 - 48 \iff$

$852 \times 0{,}75^n \leqslant 52 \iff 0{,}75^n \leqslant \dfrac{52}{852} \iff \ln\left(0{,}75^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{52}{852}\right)$

$\iff n \times \ln(0{,}75) \leqslant \ln\left(\dfrac{52}{852}\right)$. Or $\ln(0{,}75) < 0$ donc

$n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{52}{852}\right)}{\ln(0{,}75)}$ et $\dfrac{\ln\left(\dfrac{52}{852}\right)}{\ln(0{,}75)} \approx 9{,}7$ donc $n \geqslant 10$.

La présidente démissionnera donc au bout de 10 mois.

Partie B

1. Algorithme complété :

Variables :	S est un nombre réel
	N est un entier
	U est un nombre réel
Initialisation :	S prend la valeur 0
	U prend la valeur 900
Traitement :	Pour N allant de 1 à 12 :
	Affecter à S la valeur $S + 10 \times U$
	Affecter à U la valeur $0{,}75U + 12$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. Soit u_n le nombre d'adhérents pour le mois n, n étant un entier naturel compris entre 0 et 11. Chaque adhérent verse 10 €, donc pour chaque mois, la somme récoltée sera de $10 \times u_n$. On a donc :

$S = 10 \times u_0 + 10 \times u_1 + 10 \times u_2 + \ldots\ldots + 10 \times u_{11} = 10 \times (u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{11})$.

Or pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 48$ et la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$.

Donc $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots\cdots + v_{11} = v_0 \times \dfrac{1-q^{12}}{1-q} = 852 \times \dfrac{1-0{,}75^{12}}{1-0{,}75} \approx 3\,300$.

Donc $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots u_{11} = v_0 + 48 + v_1 + 48 + v_2 + 48 + \cdots\cdots + v_{11} + 48$
$= 3\,300 + 12 \times 48 \approx 3\,876$.

Pour finir $S = 10 \times 3\,876 = 38\,760$.

Le montant total des cotisations pendant l'année 2017 s'élèvera à environ 38 760 euros.

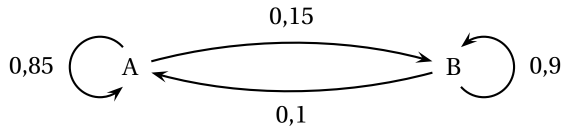
EXERCICE 2 — 5 POINTS

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. La première énigme est facile, donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. Donc $P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.

2. Le graphe probabiliste :



3. La matrice M associée à ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.

Puis $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}85 & 15 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \end{pmatrix}$

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $a_n + b_n = 1$ donc $b_n = 1 - a_n$.
On pose $P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix}$ et $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. On a $P_{n+1} = P_n \times M$.

Donc $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}85a_n + 0{,}1b_n & 0{,}15a_n + 0{,}9b_n \end{pmatrix}$

Donc $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 0{,}1b_n = 0{,}85a_n + 0{,}1(1 - a_n) = 0{,}85a_n + 0{,}1 - 0{,}1a_n$
$= 0{,}75a_n + 0{,}1$.

5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = a_n - 0{,}4$.

a. $v_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}4 = 0{,}75a_n + 0{,}1 - 0{,}4 = 0{,}75a_n - 0{,}3$
$= 0{,}75 \times \left(a_n - \dfrac{0{,}3}{0{,}75}\right) = 0{,}75 \times (a_n - 0{,}4) = 0{,}75v_n$.

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$ et de 1$^{\text{er}}$ terme $v_1 = a_1 - 0{,}4 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

b. Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0{,}6 \times 0{,}75^{n-1}$.
De plus pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = a_n - 0{,}4$ donc $a_n = v_n + 0{,}4$.
Donc $a_n = 0{,}6 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}4$.
Or $0{,}6 = 0{,}8 \times 0{,}75$ donc $a_n = 0{,}6 \times 0{,}75 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}4 = 0{,}8 \times 0{,}75^n + 0{,}4$.

c. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$ et $q \in]-1~;~1[$ donc la limite de (v_n) lorsque n tend vers l'infini est égale à zéro.

d. Calculons à présent la limite de la suite (a_n). Comme pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = v_n + 0{,}4$, on peut en déduire que la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers l'infini est égale à 0,4. Comme pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = 1 - a_n$, la limite de la suite (b_n) est donc $1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

La probabilité d'obtenir une question facile sera donc de 0,4, celle d'une question difficile sera de 0,6; il y aura donc plus de chance d'avoir une question difficile plutôt qu'une question facile.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a vu que $a_n = 0{,}8 \times 0{,}75^n + 0{,}4$, donc $a_n \geqslant 0{,}4$; on en déduit que $b_n \leqslant 0{,}6$.

La probabilité d'obtenir une question difficile sera donc majorée par 0,6, ce qui contredit l'affirmation de la revue spécialisée en jeux vidéo.

Partie B

À l'aide de l'algorithme de Dijkstra :

Départ-Sommet	A	B	C	D	E	F	G
A	0	2,A	6,A	10,A	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
B(2)			~~6,A~~ 5,B	10,A	$+\infty$	$+\infty$	17,B
C(5)				~~10,A~~ 9,C	14,C	$+\infty$	17,B
D(9)					~~14,C~~ 12,D	$+\infty$	17,B
E(12)						13,E	~~17,B~~ 16,E
F(13)							16,E

Le tracé le plus cours entre A et G est donc : A $\xrightarrow{2}$ B $\xrightarrow{3}$ C $\xrightarrow{4}$ D $\xrightarrow{3}$ E $\xrightarrow{4}$ G
Il durera 16 minutes.

EXERCICE 3 **6 POINTS**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $e^{3x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-3x+2$.

   $-3x+2 \geqslant 0 \iff -3x \geqslant -2 \iff 3x \leqslant 2 \iff x \leqslant \dfrac{2}{3}$.

   $f(0) = 1$ $\qquad f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{e^2}{3} \approx 2{,}463$ $\qquad f(1) = 0$

   Tableau de variations de la fonction f sur $[0\ ;\ 1]$:

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{e^2}{3}$	$\searrow$	0

2. La dernière ligne donnée par le logiciel de calcul formel, donne une factorisation de la dérivée seconde de f : $f''(x) = 3e^{3x}(1-3x)$.
   Or pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $3e^{3x} > 0$, donc $f''(x)$ s'annule et change de signe lorsque $1-3x$ s'annule et change de signe.

   $1-3x = 0 \iff x = \dfrac{1}{3}$ et $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \left(1-\dfrac{1}{3}\right)e^{3\times\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3}e$.

   Les coordonnées du point d'inflexion sont donc : $x = \dfrac{1}{3}$ et $y = \dfrac{2}{3}e$.

Partie B

1. $f(0) = (1-0)e^0 = 1$ et $g(0) = 0-0+1 = 1$
   $f(1) = (1-1)e^3 = 0$ et $g(1) = 1-2+1 = 0$
   Les points A et B sont donc des points communs à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. **a.** Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $x \geqslant 0 \iff 3x \geqslant 0 \iff e^{3x} \geqslant e^0 \iff e^{3x} \geqslant 1$
   $\iff e^{3x} - 1 \geqslant 0$.

   b. Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $x \geqslant 0$ et $e^{3x} - 1 \geqslant 0$.
   La somme de deux nombres positifs ou nuls étant positive ou nulle, on en déduit que $e^{3x} - 1 + x \geqslant 0$.

   c. Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $f(x) - g(x) = (1-x)\left(e^{3x} - 1 + x\right)$.
   Or d'après la question précédente, $e^{3x} - 1 + x \geqslant 0$.
   Donc pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $f(x) - g(x)$ a le même signe que $1-x$. Or sur cet intervalle $1-x \geqslant 0$, donc pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$.

3. **a.** Une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ est définie par $G(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x$.

   Donc $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = [G(x)]_0^1$.

   $G(1) = \dfrac{1}{3} - 1 + 1 = \dfrac{1}{3}$ et $G(0) = 0$.

   Donc $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \dfrac{1}{3}$.

b. L'aire de la partie grisée se calcule avec l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$.

$I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3 - 4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{\mathrm{e}^3 - 7}{9} \approx 1{,}5$ u.a.

EXERCICE 4 **3 POINTS**

Commun à tous les candidats

1. $P(X=1)=\dfrac{\ln(2)-\ln(1)}{\ln(10)}=\dfrac{\ln(2)}{\ln(10)}\approx 0{,}301$.

2. a. Calculons la fréquence. $f=\dfrac{11094}{36677}\approx 0{,}302$.

Ce résultat est donc très proche de $P(X=1)$.

Pour confirmer cette hypothèse, cherchons l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

On a $n\geqslant 30$, $np\geqslant 5$ et $n(1-p)\geqslant 5$ on peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% :

$$I=\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

Or $p-1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\approx 0{,}2963$ et $p+1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\approx 0{,}3057$.

Finalement $I\approx[0{,}2963\ ;\ 0{,}3057]$.

La fréquence de communes dont la population est un nombre commençant par 1 est environ 0,302.

$0{,}302\in I$ donc l'hypothèse ne peut pas raisonnablement être remise en doute.

Cette observation est donc compatible avec l'affirmation : le premier chiffre de la population des communes en France au 1$^{\text{er}}$ janvier 2016 suit la loi de Benford.

b. À de très rares exceptions (personnes de petites tailles, ou personnes très grandes), la taille la plus courante pour un candidat au baccalauréat est comprise entre 100 cm et 199 cm.

Donc cela correspond au cas où $X=1$ (cas ultra-majoritaire).

On s'attend donc à trouver $P(X=1)\approx 1$. Mais d'après la première question, $P(X=1)\approx 0{,}301$.

La loi de Benford n'est donc absolument pas adaptée à ce cas.