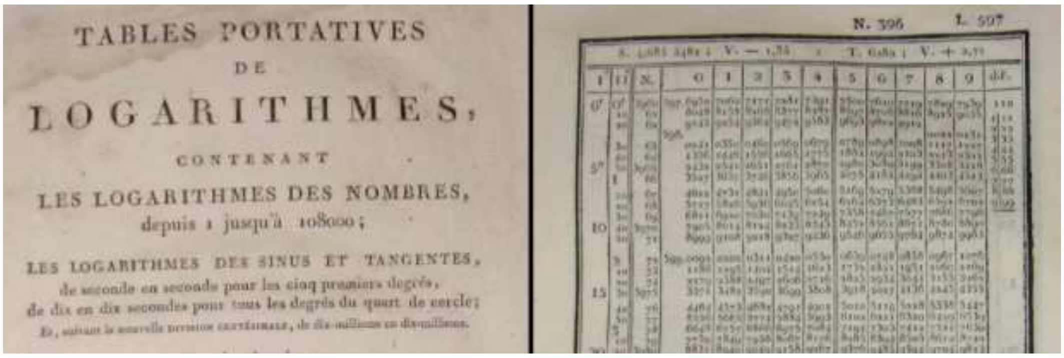
CHAPITRE

4 Fonctions logarithme

Sommaire

Partie A (s_5)

Au début du XVII^e siècle, navigateurs, financiers et surtout astronomes sont confrontés à des calculs astronomiques. Pour faciliter ces calculs, le théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais John Napier (1550-1617, en français Neper) recherche une fonction qui puisse transformer des produits très compliqués à calculer en sommes plus abordables.
Il est amené à rechercher des fonctions f vérifiant $f(a \times b) = f(a) + f(b)\dots$ le logarithme népérien est né !



1 La fonction logarithme népérien

1.1 Définition

Définition 1.

On appelle fonction **logarithme népérien**, notée ln, l'unique fonction f définie et dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ ayant pour dérivée la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et vérifiant, pour tous réels a et b strictement positifs, $f(a \times b) = f(a) + f(b)$.

1.2 Propriétés algébriques

Propriété 2.

Soient a et b deux réels strictement positifs et n est un entier relatif, alors :

propriété fondamentale

- produit : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
- inverse : $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
- quotient : $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- puissance : $\ln(a^n) = n\ln(a)$;
- racine carrée : $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

En résumé, le logarithme népérien a la particularité de transformer les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications.

Démonstrations :

- inverse : on a $a \times \dfrac{1}{a} = 1$.

$$\begin{aligned} &\text{Donc, } && \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1) = 0 \\ &\iff && \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \\ &\iff && \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a). \end{aligned}$$

- quotient : on peut écrire $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right)$

$$\begin{aligned} &= \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \\ &= \ln(a) - \ln(b). \end{aligned}$$

- puissance : $\ln(a^n) = \ln(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}})$

$$\begin{aligned} &\underbrace{= \ln(a) + \ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n \text{ fois}} \\ &= n \ln(a). \end{aligned}$$

- racine carrée : on a $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

$$\begin{aligned} &\text{Donc, } && \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(a) \\ &\iff && \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = \ln(a) \\ &\iff && \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a). \end{aligned}$$

Remarque 3
La propiété fondamentale se généralise au cas d'un produit de n facteurs :

$$\ln(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n).$$

Exemple 4
Transformations d'expressions numériques :

- $$\begin{aligned} \ln(24) &= \ln(2^3 \times 3) \\ &= \ln(2^3) + \ln(3) \\ &= 3\ln(2) + \ln(3). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \ln\left(\frac{16}{9}\right) &= \ln(16) - \ln(9) \\ &= \ln(2^4) - \ln(3^2) \\ &= 4\ln(2) - 2\ln(3). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \ln\left(\sqrt{96}\right) &= \frac{1}{2}\ln(96) \\ &= \frac{1}{2}\ln(2^5 \times 3) \\ &= \frac{1}{2}\left[5\ln(2) + \ln(3)\right]. \end{aligned}$$

2 Étude de la fonction logarithme népérien

2.1 Variations de la fonction $x \mapsto \ln x$

D'après la définition, la fonction $x \mapsto \ln x$ est définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$, de dérivée la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. La dérivée étant positive, la fonction logarithme népérien est donc croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

On admet la propriété suivante :

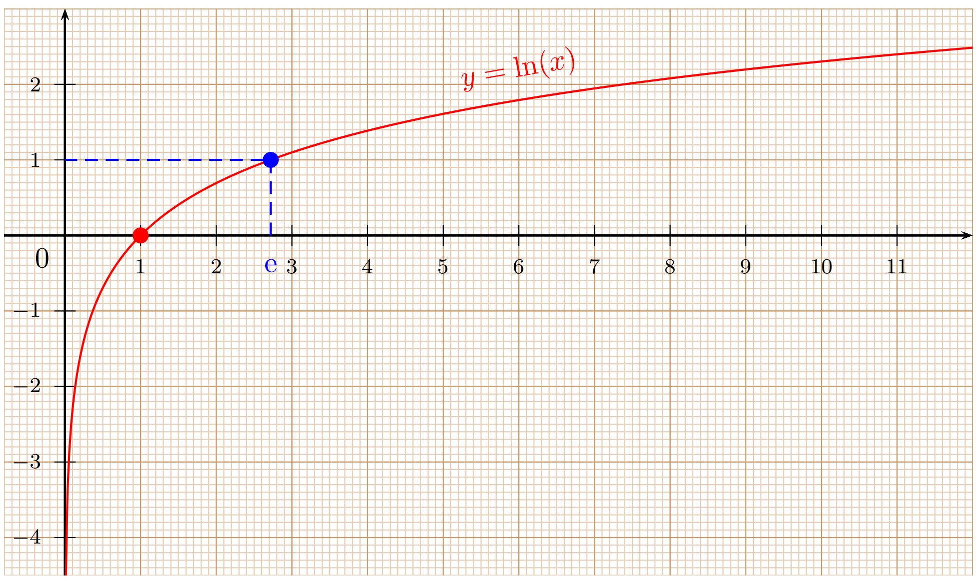
Propriété 5.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Conséquence : la droite $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	0	$+\infty$

D'après le tableau de variation de la fonction ln, on en déduit que l'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution notée e dans $]\,0\,;\,+\infty\,[$.



2.2 Nombre e

On a deux valeurs importants à connaitre concernant le logarithme népérien :

$$\ln(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(\mathrm{e}) = 1$$

Exemple 6
Simplification d'expressions contenant e :

- $\ln(\mathrm{e}^2) = 2\ln(\mathrm{e}) = 2$;
- $\ln(\mathrm{e}^{-1}) = -\ln(\mathrm{e}) = -1$.

Propriété 7.

Pour tout réel $a, \ln\left(\mathrm{e}^a\right) = a$.

Démonstration : pour tout réel $a, \ln\left(\mathrm{e}^a\right) = a \ln \mathrm{e} = a \times 1 = a$.

2.3 Croissance comparée avec les fonctions puissance

Propriété 8.

On a les limites suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$;
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$.

on dit que « la puissance l'emporte sur le logarithme »

En particulier, avec $n = 1$, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$$